Meksykańskie różności

piątek, 4 luty 2005

91. Punkty A, B i C leżą na prostej k w tej właśnie kolejności. Okrąg ω_1 jest okręgiem o średnicy AB, zaś okrąg ω_2 jest okręgiem o średnicy BC. Okrąg ω, styczny do prostej AC w punkcie B, przecina okręgi ω_1 i ω_2 odpowiednio w punktach P i Q. Prosta PQ przecina okrąg ω_1 w punktach P i R, zaś okrąg ω_2 w punktach Q i S. Proste AR i CS przecinają się w punkcie X. Wykazać, że $BX \perp AC$.

92. Joasia i Onufry grają w następującą grę. Na stole leżą karty, na każdej karcie napisane są dwie liczby całkowite dodatnie niewiększe niż 2003, przy czym każda para (a, b) dla $1 \leqslant a < b \leqslant 2003$ pojawia się na kartach dokładnie raz (innych par nie ma). Ruch polega na wybraniu karty i zapisaniu iloczynu liczb na niej na tablicy. Kto spowoduje, że NWD liczb na tablicy osiągnie 1, przegrywa. Joasia pierwsza wykonuje ruch. Czy ma strategię wygrywającą?

93. Joasia bawi się z liczbami. Mając liczbę całkowitą dodatnią n potrafi ona stworzyć liczby $2n+1$ i $3n+2$. Niech S_n oznacza zbiór wszystkich liczb, które Joasia może otrzymać, mając na początku liczbę n. Joasia mówi, że liczby n i m się przyjaźnią, jeśli $S_n \cap S_m \neq \emptyset$. Ile jest liczb mniejszych od 2003 przyjaźniących się z 2003?

94. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie n, dla których liczba n^2 ma więcej dzielników dających resztę 3 przy dzieleniu przez 4 niż tych dających resztę 1.

95. Dana jest szachownica $n \times n$ pomalowana w szachownicę. Ruch polega na obraniu prostokąta większego niż jednostkowy, o takiej samej parzystości obu boków, i zamianie wszystkich kolorów pól zawartych w nim. Dla jakich n da się za pomocą takich ruchów doprowadzić do jednokolorowej szachownicy?

96. Dany jest trapez $ABCD$ ($AB \| CD$). Punkt P jest przecięciem dwusiecznych zewnętrzych kątów B i C, punkt Q jest przecięciem dwusiecznych zewnętrznych kątów A i D. Wykazać, że długość odcinka PQ to połowa obwodu trapezu $ABCD$.

97. Punkty B i C są takimi różnymi punktami okręgu ω, że proste AB i AC są styczne do tego okręgu. Punkt Q leży na odcinki AC, prosta BQ przecina okrąg ω w punktach P i B. Punkt J jest takim punktem odcinka BC, że $QJ \| AB$. Wykazać, że $PJ \| AC$ wtedy i tylko wtedy gdy $BC^2 = AC \cdot QC$.

98. Każdą przekątną i bok ośmiokąta pomalowano na jeden z dwóch kolorów. Wykaż, że istnieje co najmniej 7 monokolorowych trójkątów o wierzchołkach w wierzchołkach ośmiokąta.