Jakieś drugie etapy

1. Dane są liczby naturalne k, n większe od 1, przy czym liczba $p = 2k - 1$ jest pierwsza. Dowieść, że jeżeli liczba

$$\binom{n}{2} - \binom{k}{2}$$

jest podzielna przez p to jest podzielna przez p^2.

2. Punkty A, B, C leżą właśnie w tej kolejności na jednej prostej przy czym $AB < BC$. Punkty D, E są wierzchołkami kwadratu $ABDE$. Okrąg o średnicy AC przecina prostą DE w punktach P i Q przy czym punkt P należy do odcinka DE. Proste AQ i BD przecinają się w punkcie R. Udowodnić, że $DP = DR$.

3. Niech $n \geqslant 3$ będzie liczbą naturalną. Dowieść, że dowolny wielomian postaci

$$x^n + a_{n-3}x^{n-3} + a_{n-4}x^{n-4} + a_{n-5}x^{n-5} + \ldots + a_1x + a_0$$

gdzie co najmniej jeden ze współczynników rzeczywistych $a_0, a_1, \ldots, a_{n-3}$ jest różny od zera, ma mniej niż n pierwiastków rzeczywistych (każdy pierwiastek liczymy tyle razy, ile jego krotność).

4. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne $n \geqslant 3$, dla których prawdziwe jest następujące zdanie: W dowolnym n-wyrazowym ciągu arytmetycznym $a_1, a_2, \ldots, a_n$, dla którego liczba $1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + ... + n \cdot a_n$ jest wymierna, istnieje wyraz bedący liczbą wymierną.

5. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkat ABC. Prosta AI przecina bok BC w punkcie D. Dowieść, że $AI + CD = AC$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\angle B = 60^\circ + \frac{1}{3}\angle C$.

6. Dla danej liczby całkowitej dodatniej n rozstrzygnać, czy podzbiorów n-elementowych zbioru $1, 2, 3, \ldots, 2n-1, 2n$ mających sumę elementów parzystą jest tyle samo, co podzbiorów n-elementowych mających nieparzystą sumę elementów. Jeśli nie, to rozstrzygnąć, których jest więcej i o ile.

7. Rozstrzygnąć, czy istnieje taki wielomian W o współczynnikach całkowitych, że istnieją różne liczby a, b, c całkowite, że:

$$W(a) = b, W(b) = c, W(c) = a$$

8. Dany jest trójkąt równoramienny ABC w którym $\angle A = 90^\circ$. Niech M będzie środkiem boku AB. Prosta przechodząca przez A i prostopadła do prostej CM przecina bok BC w punkcie P. Pokazać, że $\angle AMC = \angle BMP$.