

Kąty w kole

8.10.2008

1. Okrąg przechodzący przez wierzchołki A i B kwadratu $ABCD$ przecina odcinki BC i BD ponownie w punktach odpowiednio P i Q . Okrąg opisany na CPQ przecina odcinek BQ ponownie w punkcie R . Udowodnić, że punkty A , R , P są współliniowe.

2. W trójkącie ostrokątnym ABC punkt D jest rzutem punktu A na odcinek BC , natomiast punkty E i F - rzutami punktu D odpowiednio na boki AC i AB . Pokazać, że punkty B , C , E i F leżą na jednym okręgu.

3. Punkt D leży na boku AB trójkąta ABC . Okręgi styczne do prostych AC i BC odpowiednio w punktach A i B przechodzą przez punkt D i przecinają się po raz drugi w punkcie E . Niech F będzie punktem symetrycznym do C względem symetralnej odcinka AB . Wykazać, że D , E i F leżą na jednej prostej.

4. Niech ABC będzie trójkątem wpisanym w okrąg ω , a K , L , M - środkami łuków BC , CA , AB okręgu ω niezawierających wierzchołków trójkąta. Pokazać, że ortocentrum trójkąta KLM pokrywa się ze środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC .

5. Oznaczmy przez H ortocentrum trójkąta ABC . Pokazać, że okręgi opisane na trójkątach ABH , BCH i CAH są przystające.

6. Okrąg, którego średnicą jest wysokość trójkąta ABC opuszczona z wierzchołka A , przecina boki AB i AC odpowiednio w D i E . Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na ABC . Wykazać, że OA jest prostopadła do DE .

7. Niech AD i BE będą wysokościami trójkąta ABC , a punkt P - punktem przecięcia prostej DE z niezawierającym punktu A łukiem okręgu opisanego na trójkącie ABC . Udowodnić, że dwusieczna kąta BCP odcina z kąta DPB trójkąt równoramienny.