Kanadyjska olimpiada

1. Niech X będzie zbiorem liczb całkowitych nieujemnych. Znaleźć wszystkie takie funkcje $f : X \to X$, że dla każdych $x, y \in X$ zachodzi $yf(x) + xf(y) = (x + y)f(x^2 + y^2)$.

2. Rozstrzygnąć czy istnieje rozwiązanie układu:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 = x + y + z \\ x^2 + y^2 + z^2 = xyz \end{cases}$$

w liczbach dodatnich.

3. Trzy okręgi $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ przechodzą przez ustalone punkty A i B. Zmienna prosta k przechodząca przez punkt A przecina okręgi $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ odpowiednio w punktach X, Y, Z tak że punkt X leży między Y i Z. Pokazać, że stosunek $\frac{XY}{XZ}$ nie zależy od wyboru prostej k.

4. Wierzchołek C trójkąta równocznego ABC leży wewnątrz okręgu o środku w O, przechodzącego przez punkty A i B. Punkt X leży na tym okręgu, jest różny od A i spełnia zależność $AB = BX$, zaś punkt C leży na cięciwie XY. Pokazać, że $AO = CY$.

5. Pokazać, że dla dodatnich x, y, z zachodzi:

$$x^x y^y z^z \geqslant (xyz)^{\frac{x+y+z}{3}}$$

6. Pokazać, że dla $n > 0$ i $k \geqslant 0$ istnieje nieskończenie wiele rozwiązań równania $x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3 = y^{3k+2}$ w liczbach całkowitych dodatnich $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$.

7. Pokazać, że dla x, y, z nieujemnych zachodzi nierówność:

$$x(x-z)^2 + y(y-z)^2 \geqslant (x-z)(y-z)(x+y-z)$$