KÓŁECZKO Z JEDNOKŁADNOŚCI (14.11.2007)

1. TEORIA

1.1. Definicja - Jednokładność o środku O i skali α to przekształcenie płaszczyzny na płaszczyznę, które przekształca punkt A na taki punkt A', że $\vec{OA'} = \alpha \cdot \vec{OA}$.

1.2. Jednokładność o skali różnej od 1 ma dokładnie jeden punkt stały - środek jednokładności.

1.3. Jednokładność przekształca dowolną figurę na figurę do niej podobną.

1.4. Środek jednokładności, punkt i jego obraz leżą na jednej prostej.

1.5. Jednokładność nie zmienia orientacji.

1.6. Złożenie dwóch jednokładności o środkach O_1, O_2 i skalach α i β jest:

- jeśli $\alpha \cdot \beta = 1$ - przesunięciem o wektor $\vec{O_2O_1}$
- jeśli $\alpha \cdot \beta$ różne od 1 - jednokładnością o skali $\alpha \cdot \beta$ i środku leżącym na prostej O_1O_2

2. ZADANIA

2.1. Dany jest trójkąt ABC. Skonstruować kwadrat $WXYZ$ taki, że punkty W, X należą do odcinka AB, punkt Y - do odcinka BC, a punkt Z - do odcinka AC.

2.2. Punkt P należy do wnętrza czworokąta wypukłego $ABCD$. Wykazać, że środki cieżkości trójkątów: ABP, BCP, CDP, DAP są wierzchołkami równoległoboku.

2.3. Dany jest sześciokąt wypukły $ABCDEF$. Wykazać, że środki ciężkości trójkątów ABC, BCD, CDE, DEF, EFA, FAB są wierzchołkami sześciokąta, którego przeciwległe boki są równe i równoległe.

2.4. Okręgi o_1 i o_2 są styczne wewnętrznie w punkcie B. Cięciwa AC okręgu o_1 jest styczna do okręgu o_2 w punkcie M. Wykazać, że BM jest dwusieczną kąta ABC.

2.5. Dany jest trójkąt ABC. W kąty przy wierzchołkach A i B wpisać dwa przystające okręgi styczne zewnętrznie.

2.6. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boku AC w punkcie D. Odcinek DE jest średnicą tego okręgu, a prosta BE przecina bok AC w punkcie F. Wykazać, że $AF = CD$.

2.7. W trójkącie ABC punkt H jest ortocentrum, O - środkiem okręgu opisanego, a S - środkiem cieżkości. Udowodnić, że punkty H, S, O są współliniowe oraz $HS = 2 \cdot SO$.