KÓŁECZKO Z IZOMETRII (25.10.06)

1. TEORIA

1.1. Definicja - Izometria (przekształcenie izometryczne) to takie przekształcenie płaszczyzny na tę samą płaszczyznę, które zachowuje odległości.

1.2. Izometria przekształca dowolną figurę na figurę do niej przystającą, m.in. zachowuje kąty, współliniowość punktów oraz kolejność punktów na prostej.

1.3. Wszystkie izometrie dzielimy na:

- przesunięcie (translację) [$T_{\vec{v}}$ - translacja o wektor $\vec{v}$]
- obrót [R_A^α - obrót o kąt skierowany α wokół punktu A]
- symetrię środkową (szczególny przypadek obrotu) [S_A - symetria środkowa o środku w punkcie A]
- symetrię osiową (szczególny przypadek symetrii z poślizgiem) [S_k - symetria osiowa względem prostej k]
- symetrię z poślizgiem (złożenie symetrii osiowej i przesunięcia o wektor równoległy do osi symetrii)

1.4. Izometrie dzielimy na parzyste i nieparzyste. Nieparzyste zmieniają orientację figur. Wszystkie izometrie nieparzyste są pewnymi symetriami z poślizgiem (być może zerowym).

1.5. Złożenie dwóch izometrii jest zawsze izometrią, m.in:

- $R_A^\alpha \circ R_B^\beta = R_C^{\alpha+\beta}$, gdzie C jest takim punktem, że $\angle BAC = \frac{\alpha}{2}$ i $\angle ABC = \frac{\beta}{2}$ (jeśli $\alpha + \beta = 360°$, otrzymamy przesunięcie o pewien wektor, dla dwóch symerii środkowych o środkach A, B, będzie to przesuniecie o wektor $2\vec{BA}$)
- $T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}} = T_{\vec{u}+\vec{v}}$
- jeśli $k \parallel l$, to $S_k \circ S_l = T_{2\vec{u}}$, gdzie $\vec{u}$ jest wektorem prostopadłym do k oraz $T_{\vec{u}}(l) = k$.
- jeśli $k \nparallel l$, to $S_k \circ S_l = R_A^{2\alpha}$, gdzie $A = k \cap l$ oraz α jest kątem pomiędzy prostymi l i k.

2. ZADANIA

2.1. Dany jest trójkąt ABC. Na zewnątrz dobudowujemy trójkąty prostokąnte równoramienne ACD i BCE, takie, że $DA = DC$ i $EC = EB$. Niech M będzie środkiem boku AB. Udowodnić, że $\triangle DME$ jest trójkątem prostokątnym równoramiennym.

2.2. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Na zewnątrz dobudowujemy trójkąty prostokątne równoramienne AKB, BLC, CMD, DMA, gdzie K, L, M, N są wierzchołkami kątów prostych. Dowieść, że $KM = LN$.

2.3. Dana jest prosta k i punkty A i B leżące po różnych stronach tej prostej. Skonstruować taki punkt C na prostej k, żeby prosta k była dwusieczną kąta ACB.

2.4. Dany jest czworokąt $ABCD$, który można wpisać w okrąg. Udowodnić, że jest to trapez równoramienny, jeśli $2EF = AD + CB$, gdzie E jest środkiem AB, zaś F - środkiem CD.

2.5. Dane są dwa punkty A i B oraz okrąg o. Znaleźć zbiór wszystkich punktów D, dla których istnieje punkt C należący do okręgu o taki, że $ABCD$ jest równoległobokiem.

2.6. Dany jest czworokąt $ABCD$. Dobudowujemy na zewnątrz trójkąty równoboczne ABM i CDL oraz wewnątrz - trójkąty równoboczne DAK i BCN. Dowieść, że czworokąt $KLNM$ jest równoległobokiem.