Izometrie

10.12.2008

1. Punkt M leży wewnątrz trójkąta równobocznego ABC, przy czym $MA^2 + MB^2 = MC^2$. Znaleźć miarę kąta AMB.

2. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\angle ACB = 60^\circ$ oraz $AC < BC$. Punkt D leży na boku BC tak, że $BD = AC$. Punkt E jest symetryczny do A względem punktu C. Udowodnić, że $AB = DE$.

3. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg oraz punkty K, L, M i N będące odpowiednio środkami boków AB, BC, CD, DA. Proste k, l, m, n przechodzą odpowiednio przez punkty K, L, M i N oraz są prostopadłe odpowiednio do CD, DA, AB, BC. Udowodnić, że proste k, l, m i n są współpękowe.

4. Dany jest kąt wypukły α i punkt A w jego wnętrzu. Znaleźć takie punkty B i C należące do różnych ramion kąta α, aby obwód trójkąta ABC był jak najmniejszy.

5. W pięciokącie $ABCDE$:

$$BC = CD, \qquad DE = EA, \qquad \angle BCD = \angle DEA = 90^\circ.$$

Udowodnić, że z odcinków o długości AC, CE i EB można zbudować trójkąt. Wyznaczyć miary jego kątów, wiedząc, że $\angle ACE = \alpha$ oraz $\angle BEC = \beta$.

6. Wewnątrz kąta wypukłego o wierzchołku w punkcie P leży punkt A. Punkty X i Y leżą na różnych ramionach tego kąta w równej odległości od P tak, że wartość sumy $AX + AY$ jest najmniejsza. Wykazać, że $\angle XAP = \angle YAP$.