KÓŁECZKO Z IZOMETRII (31.10.2007)

1. TEORIA

1.0. Definicja: Izometria (przekształcenie izometryczne) to takie przekształcenie płaszczyzny na tę samą płaszczyznę, które zachowuje odległości.

1.1. Izometria przekształca dowolną figurę na figurę do niej przystającą, m.in. zachowuje kąty, współliniowość punktów oraz kolejność punktów na prostej.

1.2. Wszystkie izometrie dzielimy na:

- przesunięcie (translację) [$T_{\vec{v}}$ - translacja o wektor $\vec{v}$]
- obrót [R_A^α - obrót o kąt skierowany α wokół punktu A] (szczególny przypadek to symetria środkowa [S_A - symetria środkowa o środku w punkcie A])
- symetrię z poślizgiem - złożenie symetrii osiowej i przesunięcia o wektor równoległy do osi symetrii (szczególny przypadek to symetria osiowa [S_k - symetria osiowa względem prostej k])

1.3. Izometrie dzielimy na parzyste i nieparzyste. Nieparzyste zmieniają orientację figur. Wszystkie izometrie nieparzyste są pewnymi symetriami z poślizgiem (być może zerowym).

1.4. Złożenie dwóch izometrii jest zawsze izometrią, m.in:

- $R_A^\alpha \circ R_B^\beta = R_C^{\alpha+\beta}$, gdzie C jest takim punktem, że $\angle BAC = \frac{\alpha}{2}$ i $\angle CBA = \frac{\beta}{2}$ (jeśli $\alpha + \beta = 360°$, otrzymamy przesunięcie o pewien wektor, dla dwóch symerii środkowych o środkach A, B, będzie to przesuniecie o wektor $2\vec{BA}$)
- $T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}} = T_{\vec{u}+\vec{v}}$
- jeśli $k \parallel l$, to $S_k \circ S_l = T_{2\vec{u}}$, gdzie $\vec{u}$ jest wektorem prostopadłym do k oraz $T_{\vec{u}}(l) = k$.
- jeśli $k \nparallel l$, to $S_k \circ S_l = R_A^{2\alpha}$, gdzie $A = k \cap l$ oraz α jest kątem pomiędzy prostymi l i k.

2.ZADANKA

2.0. Dany jest równoległobok $ABCD$, w którym $AB = x$ i $BC = y$. Punkt P należy do wnętrza tego równoległoboku i $PA = a$, $PB = b$, $PC = c$, $PD = d$. Wykazać, że istnieje czworokąt wypukły o przekątnych długości x i y oraz bokach długości a, b, c, d.

2.1. Punkt P należy do krótszego łuku AB okręgu opisanego na trójkącie równobocznym ABC. Wykazać, że $PA + PB = PC$.

2.2. Dany jest kąt wypukły α i punkt A w jego wnętrzu. Znaleźć takie punkty B i C należące do różnych ramion tego kąta, by obwód trójkąta ABC był najmniejszy.

2.3. W czworokącie wypukłym $ABCD$ punkt P jest środkiem boku AD, a punkt Q jest środkiem boku BC. Wykazać, że $2 \cdot PQ = AB + CD$ wtedy i tylko wtedy, gdy proste AB i CD są równoległe.

2.4. Punkty P, Q, R należą odpowiednio do boków BC, CA, AB trójkąta ABC. Punkty K, L, M są środkami okręgów opisanych odpowiednio na trójkątach ARQ, BPR, CQP. Wykazać, że trójkąty ABC i KLM są podobne.

2.5. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, a punkty K, L, M, N są odpowiednio środkami jego boków AB, BC, CD, DA. Proste k, l, m, n przechodzą odpowiednio przez punkty K, L, M, N i są prostopadłe odpowiednio do prostych CD, DA, AB, BC. Wykazać, że proste k, l, m, n przecinają się w jedym punkcie.

2.6. Trójkąty równoboczne ABC i AEF mają taką samą orientację. Punkty K, L, M są środkami odpowiednio odcinków BC, CE, EF. Wykazać, że $KL = LM$.