Izometrie

1. Na zewnątrz boków AB i BC trójkąta ABC zbudowano trójkąty prostokątne równoramienne PAB i QBC tak, że kąty przy wierzchołkach P i Q są proste. Pokazać, że jeśli M to środek boku AC, to $MP = MQ$ oraz $\angle PMQ = 90°$.

2. Dany jest sześciokąt wypukły $ABCDEF$ i taki punkt P wewnątrz niego, że trójkąty ABP,CDP i EFP są równoboczne. Pokazać, że środki odcinków BC,DE oraz FA tworzą wierzchołki trójkąta równobocznego.

3. Na zewnątrz trójkąta ABC dobudowano takie trójkąty ABR,BCP,CAQ, że $\angle PBC = 45°$,$\angle PCB = 30°$,$\angle QAC = 45°$,$\angle QCA = 30°$,$\angle RAB = 15°$,$\angle RBA = 15°$. Pokazać, że $\angle QRP = 90°$ i $QR = RP$.

4. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ zachodzą rowności:

$$AB = BC, CD = DE, EF = FA, \angle ABC + \angle CDE + \angle EFA = 360°$$

Pokazać, że trójkąt BDF jest równoboczny wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi $\angle ABC = \angle CDE = \angle EFA = 120°$.

5. Dany jest trójkąt ABC. Dla każdego punktu X na płaszczyźnie z wyłączeniem okręgu opisanego na ABC definiujemy $F(X)$ następująco: odbijamy punkt X względem prostych zawierających boki trójkąta ABC, na trzech otrzymanych punktach opisujemy okrąg i $F(X)$ jest jego środkiem. Pokazać, że $F(F(P)) = P$ dla każdego punktu P dla którego $F(P)$ jest określona.

6. Pokazać, że ze środkowych dowolnego trójkąta da się zbudować trójkąt. Czy będzie to też prawdą, jeśli środkowe zastąpimy prostymi dzielącymi przeciwległe boki w dowolnym stosunku k?

7. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ wszystkie boki są równej długości oraz

$$\angle A + \angle C + \angle E = \angle B + \angle D + \angle F$$

. Dowieść, że przekątne AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie.

8. Wyznaczyć wszystkie wartości wyrażenia $5ab+3bc+4ca$ dla liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c spełniających równości:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 9 \\ 5a^2 + 5c^2 + 6ac = 80 \\ 5b^2 + 5c^2 + 8bc = 125 \end{cases}$$