Inwersja - wybór zadań

1. Proste k i l są wzajemnie prostopadłe i przecinają się w punkcie P. Okręgi α_1 i α_2 przechodzą przez P i są styczne do prostej k, zaś okręgi β_1 i β_2 przechodzą przez P i są styczne do prostej l. Oprócz punktu P, pary okręgów α_i i β_j przecinają się w punkcie A_{ij}, gdzie $i, j \in \{1, 1\}$. Pokazać, że punkty A_{ij} leżą na jednym okręgu.

2. Okręgi o_1 i o_2 są styczne zewnętrznie. Prosta k jest styczna do o_1 w A i do a_2 w B przy czym $A \neq B$. Odcinek AC jest średnicą o_1, prosta CE jest styczna do o_2. Pokazać, że $CE = AC$.

3. Okręgi o_1 i o_2 przecinają się w punktach A i B. Okrąg o_3 jest styczny zewnętrznie do okręgów o_1 i o_2 w odpowiednio punktach C i D, zaś okrąg o_4 również, ale w punktach E i F. Pokazać, że okręgi opisane na trójkątach ACD i AEF są styczne.

4. Okrąg γ, wpisany w trójkąt ABC styczny jest do boków AC i BC odpowiednio w punktach E i F. Prosta EF przecina dwusieczną kąta BAC w punkcie P. Pokazać, że $\angle APB = 90°$.

5. Dany jest półokrąg Γ o średnicy AB. Półokręgi γ_1 i γ_2 mają jako średnice odcinki AC i CB, gdzie C należy do odcinka AB, oraz leżą po tej samej stronie AB co Γ. Rodzina okręgów α_i spełnia:

(a) Okrąg α_1 jest styczny wewnętrznie do Γ i zewnętrznie do γ_1 i γ_2.

(b) Okrąg α_i jest styczny wewnętrznie do Γ i zewnętrznie do γ_1 i α_{i-1} dla $i > 1$.

Pokazać, że jeśli r_i to promień okręgu α_i zaś h_i to odległość jego środka od prostej AB, to zachodzi $h_i = 2ir_i$.

6. Sfery γ_1 i γ_2 są styczne wewnętrznie do sfery Γ. Sfery $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ są styczne wewnętrznie do Γ, zewnętrznie do γ_1 i γ_2 oraz dla każdego i sfera α_i jest styczna do α_{i-1} i α_{i+1}, gdzie indeksowanie zachodzi cyklicznie. Pokazać, że $k = 6$.