Skrypcik podstawowych własności inwersji w 10,5 fakcikach

DEF. Inwersja to przekształcenie płaszczyzny bez punktu w płaszczyznę bez punktu (nazywanego środkiem inwersji - O), takie, że dla każdego punktu X jego obraz leży na półprostej OX i zachodzi $OX \cdot OX' = r^2$ gdzie r jest promieniem inwersyjnym. Zauważmy, że wówczas okrąg o promieniu r i środku w O przechodzi w inwersji sam na siebie.

FAKT1 Złożenie inwersji z samą sobą jest identycznością.

Dowód: skoro punkt X' jest obrazem X, to X jest obrazem X' z symetrii definicji inwersji ze względu na X i X'. Zatem inwersja jest sama do siebie przekształceniem odwrotnym.

FAKT2 Złożenie dwóch inwersji współśrodkowych o promieniach r_1 i r_2 jest jednokładnością o skali $\frac{r_2^2}{r_1^2}$ o środku w O.

Dowód: niech X będzie punktem, X' jego obrazem w pierwszej inwersji zaś X'' obrazem w złożeniu. Wówczas z definicji mamy, że $OX \cdot OX' = r_1^2$ i $OX' \cdot OX'' = r_2^2$. Dzieląc drugie równanie przez pierwsze mamy, że $\frac{OX''}{OX} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$ czyli definicji żądanej jednokładności.

FAKT3 Niech A i B będą punktami zaś A', B' ich obrazami w inwersji względem O i o promieniu r. Wówczas punkty A, B, A', B' leżą na jednym okręgu.

Dowód: z definicji mamy, że $OA \cdot OA' = r^2 = OB \cdot OB'$ więc z tw. odwrotnego do tw. o potędze punktu względem okręgu żądane punkty są na jednym okręgu.

FAKT4 Obrazem prostej jest okrąg przechodzący przez środek inwersji (bez środka inwersji).

Dowód: Niech A będzie rzutem O - środka inwersji na prostą k, której obraz chcemy otrzymać, zaś A' jego obrazem. Niech C będzie dowolnym innym punktem prostej k a C' jego obrazem. Wówczas z faktu3 wynika, że punkty A, C, A', C' leżą na jednym okręgu, więc suma kątów $\angle A'AC$ i $\angle CC'A'$ to kĄt pólpełny, więc skoro $\angle A'AC$ jest prosty to i $\angle CC'A'$ także. Zatem kąt $OC'A'$ jest zawsze prosty, więc punkty C' leżą na okręgu o średnicy OA'. Jednocześnie cały ten okrąg jest realizowalny, gdyż każda półprosta przecinająca prostą k realizuje pewien punkt C'. Oczywiście z tego faktu wynika, że obrazem okręgu przechodzącego przez środek inwersji jest prosta.

FAKT5 Obrazem okręgu nieprzechodzącego przez środek inwersji jest okrąg nieprzechodzący przez środek inwersji.

Dowód: niech k będzie naszym okżęgiem zaś S jego środkiem. Niech punkty A, B będą przecięciami prostej OS z okręgiem zaś A', B' ich obrazami. Niech C będzie dowolnym punktem okręgu k a C' jego obrazem. Wówczas z faktu3 punkty A, A', C, C' leżą na jednym okręgu więc łatwo zauważyć, że z warunku wpisywalnoŚci czworokąta w okrąg i kątów przyle"głych $\angle OC'A' = \angle CAO = \alpha$, analogicznie $\angle OC'B' = \angle CBO = \beta$. Rozważając zatem tw. o kącie zewnętrznym dla trójkąta ABC mamy że oba kąty $\angle ACB$ i $\angle A'C'B'$ mają miarę $|\alpha - \beta|$, więc skoro kąt $\angle ACB$ jest prosty to i $\angle A'C'B'$ jest prosty, więc wszystkie punkty C' leżą na okręgu ośrednicy $A'B'$. Analogicznie jak poprzednio pokazujemy, że cały okrąg jest realizowalny.

FAKT5a Obrazem prostej przechodzącej przez środek inwersji jest ta sama prosta.

Dowód: Po prostu punkty z wnętrza okręgu inwersyjnego zamieniają się z tymi na zewnątrz.

FAKT6 Niech A, B punkty na płaszczyźnie, zaś A', B' ich obrazy przy inwersji o środku w O i promieniu r. Wówczas $A'B' = AB \cdot \frac{r^2}{OA \cdot OB}$.

Dowód: Zauważmy, że z faktu3 wynika, że A, A', B, B' leżą na jednym okręgu. Wówczas łatwo na kątach policzyć, że trójkąty AOB i $B'OA'$ są podobne (z cechy KKK, co wynika z kątów przyległych i warunki opisywalności okręgu na czworokącie). Zatem mamy, że $\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OB}$. Ale z definicji inwersji mamy, że $OA' = \frac{r^2}{OA}$. Wstawiając to do wzorku otrzymujemy, że $\frac{A'B'}{AB} = \frac{r^2}{OA \cdot OB}$ co po przemnożeniu przez AB jest szukanym wzorem.

FAKT7 Konstrukcja inwersji: Mamy punkt X poza okręgiem inwersyjnym o środku w O. Kreślimy styczną do okręgu z punktu X a punkt styczności to G. Wówczas punkt X' - rzut G na prostą OX jest szukanym obrazem. Aby uzyskać konstrukcję dla punktu wewnątrz odwracamy całe postępowanie.

Dowód: Ze styczności kąt OGX jest prosty. Zatem z cechy podobieństwa KKK trójkąty OGX i $OX'G$ są podobne (bo jeden kąt wspólny a jeden prosty). Więc mamy, że: $\frac{OX'}{OG} = \frac{OG}{OX}$. Wymnażając stronami mamy, że $OX \cdot OX' = OG^2 = r^2$ czyli definicję inwersji.

FAKT8 Inwersja, jak każde przekształcenie różnowartościowe nie dodaje krzywym nowych punktów przecięcia. Zatem np. obrazem okręgów stycznych nieprzechodzącyh przez środek inwersji będą okręgi styczne, zaś obrazem tych okręgów względem ich punktu styczności będą dwie proste równoległe. Obrazem dwóch przecinających się okręgów w inwersji o środku w jednym z tych punktów przecięć są dwie proste przecinające się w obrazie drugiego punnktu przecięcia.

FAKT9 Jedynymi okręgami przechodzącymi same na siebie są okręgi ortogonalne (prostopadłe) z inwersyjnym (no i on sam).

Dowód: Niech O będzie środkiem inwersji, k okręgiem inwersyjnym zaś l okręgiem przechodzącym sam na siebie. Zauważmy, że l jeśi nie jest równy k to nie może zawierać we wnętrzu punktu O, gdyż w przeciwnym razie każda półprosta od punktu O do punktu z okręgu l zawierałaby dokładnie jeden punkt z okręgu l, więc te wszystkie punkty, aby przejść w inwersji na punkty z l musiałyby przejść same na siebie, więc wszystkie leżałyby na k. Zatem załóżmy, że O leży na zewnątrz l. Poprowadźmy więc styczne do l z O i niech punkty styczności to P i R. Zauważmy, że te punkty to jedyne punkty na półprostych OP i OR należące do l, więc w inwersji muszą przejść same na siebie. Zatem P i R leżą na okręgu k. Poprowadźmy proste p,r, prostopadłe do półprostych OP i OR w punktach P i R odpowiednio. Ponieważ te pólproste są w tych punktach styczne do okręgu l, to p i r zawierają promienie okręgu l, więc przecinajĄ się w jego środku. Jednocześnie jako, że proste te są prostopadłe do promieni okręgu k, to są one stycznymi do okręgu k. Zatem styczne obu okręgów w punkcie przecięcia są prostopadłe, więc okręgi są ortogonalne.

FAKT10 Inwersja zachowuje kąty między krzywymi. W szczególności przekształca okręgi i proste ortogonalne na okręgi i proste ortogonalne (dwie proste ortogonalne to proste prostopadłe a prosta ortogonalna do okręgu to prosta zawierająca jego średnicę)

Dowód: Jakieś obrzydliwe przeliczenie na kątach, które zostawiam czytelnikowi :)