

## Inwersja dla grupy najstarszej

1. Okręgi  $o_1$  i  $o_2$  przecinają się w punktach  $A$  i  $B$ . Okręgi  $o_3$  i  $o_4$  są styczne do  $o_1$  i  $o_2$  zewnętrznie odpowiednio w punktach:  $o_3$  do  $o_1$  w  $K$ ,  $o_3$  do  $o_2$  w  $L$ ,  $o_4$  do  $o_1$  w  $M$  zaś  $o_4$  do  $o_2$  w  $N$ . Pokazać, że okręgi opisane na trójkątach  $KLA$  i  $MNA$  są styczne.

2. Okrąg  $\gamma$ , wpisany w trójkąt  $ABC$  styczny jest do boków  $AC$  i  $BC$  odpowiednio w punktach  $E$  i  $F$ . Prosta  $EF$  przecina dwusieczną kąta  $BAC$  w punkcie  $P$ . Pokazać, że  $\angle APB = 90^\circ$ .

3. Sfery  $\gamma$  i  $\Gamma$  są do siebie styczne wewnętrznie. Sfera  $\beta$  jest styczna do  $\gamma$  zewnętrznie i do  $\Gamma$  wewnętrznie. Sfery  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6$  są styczne do  $\gamma$  i do  $\beta$  zewnętrznie i do  $\Gamma$  wewnętrznie, a ponadto  $\alpha_1$  jest styczna do  $\alpha_2, \alpha_2$  jest styczna do  $\alpha_3$  itd. aż  $\alpha_5$  jest styczna do  $\alpha_6$ . Pokazać, że  $\alpha_1$  jest styczna do  $\alpha_6$ .

4. Okrąg  $\alpha$  o średnicy  $AB$  jest styczny wewnętrznie do okręgów  $\phi, \psi$  o średnicach  $AC$  i  $BC$  odpowiednio, przy czym  $C$  leży na odcinku  $AB$ . Rodzina okręgów  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots$  o środkach  $O_0, O_1, O_2, \dots$  spełnia następujące warunki:

a.  $\gamma_0 = \psi$

b.  $\gamma_i$  jest styczny wewnętrznie do  $\alpha$  oraz zewnętrznie do  $\phi$  i  $\gamma_{i-1}$  dla  $i \geq 1$

Niech  $h_i$  oznacza odległość  $O_i$  od prostej  $AB$ . Pokazać, że dla każdego  $i$  zachodzi:

$$\frac{h}{r_i} = 2i$$

5. Proste  $k$  i  $l$  przecinają się w  $P$  i są do siebie prostopadłe. Okręgi  $o_1$  i  $o_3$  są styczne do siebie i do  $k$  w  $P$ . Okręgi  $o_2$  i  $o_4$  są styczne do siebie i do  $l$  w  $P$ . drugimi punktami przecięcia par okręgów:  $o_1$  i  $o_2$ ,  $o_2$  i  $o_3$ ,  $o_3$  i  $o_4$  oraz  $o_4$  i  $o_1$  są odpowiednio punkty  $K, L, M, N$ . Pokazać, że leżą one na jednym okręgu.