Indukcja

15.10.2008

1. Wykazać, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2\left(\sqrt{n+1} - 1\right).$$

2. Wykazać, że dla dowolnych dodatnich liczb x, y nierówność $2^{n-1}\left(x^n + y^n\right) \geqslant (x+y)^n$ jest spełniona dla wszystkich liczb naturalnych n.

3. Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba n^2+n+1 dzieli liczbę $n^{k+2}+(n+1)^{2k+1}$ dla wszystkich naturalnych k.

4. Dowieść, że obszary wyznaczone na płaszczyźnie przez n prostych można pomalować dwoma kolorami tak, aby żadne dwa obszary tego samego koloru nie miały wspólnego boku.

5. Udowodnić indukcyjnie nierówność między średnią arytmetyczną, a kwadratową:

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \geqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

6. Niech $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$. Wykazać, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ $a_n \geqslant \frac{13}{24}$.

7. Niech a_n będzie takim ciągiem, ze $a_1 = 1$ oraz dla $n \geqslant 1$ $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$. Pokazać, że $14 < a_{100} < 18$.