

## 1. TEORIA

### 1.1. (Zasada indukcji)

Niech  $W$  będzie pewnym zdaniem logicznym. Jeśli  $W(1)$  oraz dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  zachodzi  $W(n) \Rightarrow W(n+1)$ , to  $W(n)$  dla każdego  $n \in \mathbb{N}$ .

### 1.2. (Zasada indukcji (2), równoważna z (1))

Niech  $W$  będzie pewnym zdaniem logicznym. Jeśli  $W(1)$  oraz dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  zachodzi  $W(1) \wedge W(2) \wedge \dots \wedge W(n) \Rightarrow W(n+1)$ , to  $W(n)$  dla każdego  $n \in \mathbb{N}$ .

## 2. ZADANKA

### 2.1. Wieże z Hanoi - Jak nie będziesz się uczyć, będziesz kopać rowy (albo przekładać 100 krążków).

Mamy 3 pręty a na nich  $n$  krążków, różnej wielkości poukładane od największego do najmniejszego. Na początku wszystkie krążki są na jednym pręcie. Ruch polega na przełożeniu krążka na inny pręt, ale nie wolno kłaść większego krążka na mniejszym. Ilu potrzeba ruchów, aby przenieść wszystkie krążki na inny pręt?

### 2.2. Problem Flawiusza - Myśle, więc żyje.

Rzymianie zdecydowali się na zbiorowe samobójstwo. W tym celu stają w kręgu i zabijają co trzecią osobę (aż zostanie jedna osoba). Gdzie powinien ustawić się Flawiusz, aby zostać przy życiu?

### 2.3. Pizza Pepperoni - Akcja Matexacja!

Ile kawałków pizzy można uzyskać za pomocą  $n$  prostoliniowych cięć nożem? (Jaka jest maksymalna liczba  $L(n)$  obszarów wyznaczonych przez  $n$  prostych na płaszczyźnie?)

### 2.4. Zadanko o dużych liczbach - Większy nie znaczy lepszy.

Udowodnij, że istnieje  $N$  takie, że dla każdego  $n > N$ :

- $2^n \geq n^2$
- $99^n \geq n^{99}$ .

### 2.5. Zadanko o średnich większych i mniejszych - Napisz długi wzorek, może nazwą go Twoim nazwiskiem.

Udowodnij, że  $x_1 x_2 x_3 \cdots x_n \leq \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)^n$  (Nierówność Cauchy'ego)

### 2.6. Zadanko o poszukiwaniach sumy - Szukajcie, a znajdziecie...

Znajdź sumę (wzór zależny od  $n$ )

- $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$ .
- $1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k$ .

### 2.7. O tym, jak dodawać odejmując, potęgując lub nic-nie-robiąc - To dziwne - pomyślał Puchatek - powiedziałem »aj« wcale nie ajając...

Ciąg Fibonacciego zdefiniowany jest następująco:  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 1$  oraz dla każdej liczby naturalnej  $n$  zachodzi:  $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ . Udowodnij, że

- $a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_{n+2} - 1$

- $a_1 + a_3 + \dots + a_{2n+1} = a_{2n+2}$

- $a_{2n+1} = a_n^2 + a_{n+1}^2$

**2.8. O jawności - Jawność działania organów władzy państwowej czy organów samorządu terytorialnego stanowi kręgosłup nowoczesnej demokracji.**

Znajdź i udowodnij wzór jawny dla rekurencji

- Ciągu Fibonacciego

- $a_0 = e, a_1 = m, a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}$