PROSTE ;) KÓŁECZKO Z INDUKCJI (18.10.06)

1. TEORIA

1.1. (Zasada indukcji) Niech W będzie pewnym zdaniem logicznym. Jeśli $W(1)$ oraz dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $W(n) \Rightarrow W(n+1)$, to $W(n)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

1.2. (Zasada indukcji (2), równoważna z (1)) Niech W będzie pewnym zdaniem logicznym. Jeśli $W(1)$ oraz dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $W(1) \wedge W(2) \wedge \ldots \wedge W(n) \Rightarrow W(n+1)$, to $W(n)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

2.ZADANKA

2.1. Wykaż, że $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ dla każdego naturalnego n.

2.2. Udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$, liczba $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ dzieli się przez 133.

2.3. Wykaż, że dowolny n-elementowy zbiór ma 2^n podzbiorów.

2.4. Ciąg Fibonacciego (F_n) jest określony następująco: $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$. Wykaż, że dla każdego naturalnego n:

- $\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$
- $F_n \cdot F_{n+2} - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$
- $F_{2n+1} = F_n^2 + F_{n+1}^2$
- $F_{2n} = F_n \cdot F_{n-1} + F_n \cdot Fn + 1$

2.5. Wykaż, że dowolne n kwadratów można pociąć na skończoną liczbę kawałków tak, by z otrzymanych kawałków złożyć jeden kwadrat o polu równym sumie ich pól.

2.6. Udowodnij, że:

- $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$
- $\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$