Klasówka

grupa pierwszoklasistów

sobota, 30 września 2006

51. Pokazać, że dla $p > 3$ zachodzi $43 | 7^p - 6^p - 1$, gdzie p jest pierwsze.

52. Rozstrzygnij czy szachownicę 6×6 da się pokryć klockami domina tak, aby każda z 10 linii dzielących kratki była przecięta przez co najmniej jedno domino.

53. Pokazać, że suma dwóch kolejnych liczb pierwszych nieparzystych jest iloczynem co najmniej trzech (niekoniecznie różnych) liczb pierwszych.

54. Wielomian $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ ma trzy różne pierwiastki rzeczywiste, ale wielomian $P(Q(x))$, gdzie $Q(x) = x^2 + x + 2006$ nie ma żadnego pierwiastka rzeczywistego. Pokazać, że $P(2006) > \frac{1}{64}$.

55. W ciągach liczb dodatnich $(a_1, a_2, \dots, a_{6000000}), (b_1, b_2, \dots, b_{6000000}), (c_1, c_2, \dots, c_{6000000})$ wszystkie wyrazy są mniejsze lub równe od 99. Pokazać, że istnieją takie dwa różne indeksy k, l, że $|a_k - a_l| + |b_k - b_l| + |c_k - c_l| < 1$.

56. AB i CD są prostopadłymi średnicami okręgu ω. Punkt M leży poza okręgiem, proste MC i MD przecinają prostą AB w punktach E i F. Styczne do okręgu poprowadzone przez M przecinają prostą AB w punktach G i H. Udowodnij, że $GE = FH$.

57. W trójkącie ABC punkt M jest środkiem boku AB, a punkt D spodkiem wysokości opuszczonej na AB. Punkty K i L są odpowiednio rzutami prostopadłymi A i B na dwusieczną kąta C. Udowodnij, że punkty D, K, L, M leża na jednym okręgu.

Klasówka

grupa młodsza

sobota, 30 września 2006

54. Wielomian $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ ma trzy różne pierwiastki rzeczywiste, ale wielomian $P(Q(x))$, gdzie $Q(x) = x^2 + x + 2006$ nie ma żadnego pierwiastka rzeczywistego. Pokazać, że $P(2006) > \frac{1}{64}$.

56. AB i CD są prostopadłymi średnicami okręgu ω. Punkt M leży poza okręgiem, proste MC i MD przecinają prostą AB w punktach E i F. Styczne do okręgu poprowadzone przez M przecinają prostą AB w punktach G i H. Udowodnij, że $GE = FH$.

57. W trójkącie ABC punkt M jest środkiem boku AB, a punkt D spodkiem wysokości opuszczonej na AB. Punkty K i L są odpowiednio rzutami prostopadłymi A i B na dwusieczną kąta C. Udowodnij, że punkty D, K, L, M leżą na jednym okręgu.

58. Pokazać, że iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych z których środkowa jest sześcianem liczby całkowitej jest podzielny przez 504.

59. Udowodnić, że dla liczb dodatnich x, y, z zachodzi:

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geqslant 8(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z)$$

510. W trójkącie ostrokątnym nierównoramiennym ABC punkt D jest spodkiem wysokości spuszczonej z A, zaś E i F to rzuty punktu D na proste AB i AC odpowiednio. Punkt K jest punktem symetrycznym do A względem środka okręgu opisanego na ABC, zaś L jest punktem przecięcia prostych EF i BC. Pokazać, że $DK \perp AL$.

511. Onufry i Joasia mają do dyspozycji prostokątny kawałek czekolady o wierzchołkach $(0,0)$,$(0,n)$,(m,n),$(m,0)$. Ruch polega na zjedzeniu wszystkich niezjedzonych kostek należących do prostokąta $(0,0)$, $(0,k)$,(l,k),$(l,0)$. W każdym ruchu musi być zjedzona co najmniej jedna kostka. Grę zaczyna Joasia, przegrywa ten gracz, który zje ostatnią kostkę. Który gracz ma strategię wygrywającą?

Klasówka

grupa starsza

sobota, 30 września 2006

510. W trójkącie ostrokątnym nierównoramiennym ABC punkt D jest spodkiem wysokości spuszczonej z A, zaś E i F to rzuty punktu D na proste AB i AC odpowiednio. Punkt K jest punktem symetrycznym do A względem środka okręgu opisanego na ABC, zaś L jest punktem przecięcia prostych EF i BC. Pokazać, że $DK \perp AL$.

511. Onufry i Joasia mają do dyspozycji prostokątny kawałek czekolady o wierzchołkach $(0,0)$,$(0,n)$,(m,n),$(m,0)$. Ruch polega na zjedzeniu wszystkich niezjedzonych kostek należących do prostokąta $(0,0)$, $(0,k)$,(l,k),$(l,0)$. W każdym ruchu musi być zjedzona co najmniej jedna kostka. Grę zaczyna Joasia, przegrywa ten gracz, który zje ostatnią kostkę. Który gracz ma strategię wygrywającą?

512. Ciąg par liczb naturalnych (a_n, b_n) definiujemy następująco:

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) = \begin{cases} (2a_n, b_n - a_n) \text{ dla } a_n \leqslant b_n \\ (a_n - b_n, 2b_n) \text{ dla } a_n > b_n \end{cases}$$

Znaleźć wszystkie pary liczb (a_0, b_0) dla których jedna z liczb a_n lub b_n jest zerem.

513. Siatka ulic Hofmanville to układ skrzyżowań połączonych dwukierunkowymi drogami. W okresie remontu dróg, na części ulic wprowadzono ruch jednokierunkowy. Po pewnym czasie przywrócono na tych ulicach ruch dwukierunkowy, ale wprowadzono ruch jednokierunkowy na wszystkich pozostałych ulicach. W obu przypadkach dało się dojechać z każdego skrzyżowania do każdego innego. Czy w tym mieście można wprowadzić na wszystkich ulicach ruch jednokierunkowy zachowując tę własność?

514. W trójkącie ostrokątnym ABC punkt H jest ortocentrum. Pokazać, że:

$$\frac{AH}{BC} + \frac{BH}{CA} + \frac{CH}{AB} \geqslant \sqrt{3}$$

.

515. Wielomian W jest postaci $W(x) = x^n + nx^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0$ oraz posiada n pierwiastków rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Wiadomo, że $\sum_{i=1}^{n} x_i^{16} = n$. Znaleźć liczby $x_1, \ldots, x_n$.

516. Obliczyć:

$$\sum_{n=1}^{150} \frac{k+4}{k \cdot (k+1) \cdot (k+2) \cdot (k+3)}$$

Klasówka

grupa najstarsza

sobota, 30 września 2006

55. W ciągach liczb dodatnich $(a_1, a_2, \ldots, a_{6000000})$, $(b_1, b_2, \ldots, b_{6000000})$, $(c_1, c_2, \ldots, c_{6000000})$ wszystkie wyrazy są mniejsze lub równe od 99. Pokazać, że istnieją takie dwa różne indeksy k, l, że $|a_k - a_l| + |b_k - b_l| + |c_k - c_l| < 1$.

513. Siatka ulic Hofmanville to układ skrzyżowań połączonych dwukierunkowymi drogami. W okresie remontu dróg, na części ulic wprowadzono ruch jednokierunkowy. Po pewnym czasie przywrócono na tych ulicach ruch dwukierunkowy, ale wprowadzono ruch jednokierunkowy na wszystkich pozostałych ulicach. W obu przypadkach dało się dojechać z każdego skrzyżowania do każdego innego. Czy w tym mieście można wprowadzić na wszystkich ulicach ruch jednokierunkowy zachowując tę własność?

516. Obliczyć:

$$\sum_{n=1}^{150} \frac{k+4}{k \cdot (k+1) \cdot (k+2) \cdot (k+3)}$$

517. Rozstrzygnąć, czy istnieje taki pięciokąt wypukły $A_1A_2A_3A_4A_5$ by jeśli oznaczyć przez B_i przecięcia prostych $A_{i+1}A_{i+4}$ oraz $A_{i+2}A_{i+3}$ to punkty B_i istnieją i leżą na jednej prostej (numerowanie zachodzi cyklicznie).

518. Czy istnieje funkcja ciągła $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ taka, że dla dowolnego x rzeczywistego $f(f(x)) = 4^{-x}$.

519. Pokazać, że jeśli umieścimy n punktów wewnątrz okręgu o promieniu 1 to suma kwadratów odległości pomiędzy każdymi dwoma jest równa co najwyżej n^2.

520. Rozstrzygnąć, czy układ równań:

$$\begin{cases} a + b = c - 5 \\ ab = -c^2 \end{cases}$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych a, b, c.