## Zadania - dzień trzeci

grupa pierwszoklasistów

czwartek, 28 września 2006

**41.** Dany jest trójkąt $ABC$ o kątach odpowiednio $20°, 50°, 110°$. Punkt $D$ leży na boku $AC$ i punkt $E$ leży na boku $AB$. Kąt $\angle ACE$ jest równy $30°$. Kąt $\angle DBA$ jest równy $20°$. Obliczyć $\angle DEC$.

**42.** Niech $S(n)$ będzie sumą cyfr liczby $n$. Dowieść, że wśród 18 kolejnych liczb naturalnych trzycyfrowych istnieje liczba k, dla której $S(k)|k$.

**43.** Pokazać, że wśrod 100 kolejnych wyrazów ciągu $a_n = n^8 + n^6 + n^4 + n^2 + 1$ jest conajmniej 86 liczb złożonych.

**44.** W talii jest $n$ ponumerowanych kart. Jeśli pierwsza karta od góry ma numer $k$, szuler podnosi pierwsyzch $k$ kart, łącznie z tą kartą i kładzie je na wierzchu w odwróconej kolejności. Następnie sprawdza pierwszą kartę od góry itd. Udowodnij, że po skończonej ilości ruchów karta 1 trafi na wierzch.

**45.** W sześciokącie wypukłym $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ oznaczmy przez $G_i$ środek ciężkości trójkąta $A_{i-1}A_iA_{i+1}$ dla $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, gdzie $A_0 = A_6$ i $A_7 = A_1$. Pokazać, że proste $G_1G_4$, $G_2G_5$ i $G_3G_6$ przecinają się w jednym punkcie.

## Zadania - dzień trzeci

grupa młodsza

czwartek, 28 września 2006

**41.** Dany jest trójkąt $ABC$ o kątach odpowiednio $20°, 50°, 110°$. Punkt $D$ leży na boku $AC$ i punkt $E$ leży na boku $AB$. Kąt $\angle ACE$ jest równy $30°$. Kąt $\angle DBA$ jest równy $20°$. Obliczyć $\angle DEC$.

**43.** Pokazać, że wśrod 100 kolejnych wyrazów ciągu $a_n = n^8 + n^6 + n^4 + n^2 + 1$ jest conajmniej 86 liczb złożonych.

**44.** W sześciokącie wypukłym $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ oznaczmy przez $G_i$ środek ciężkości trójkąta $A_{i-1}A_iA_{i+1}$ dla $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, gdzie $A_0 = A_6$ i $A_7 = A_1$. Pokazać, że proste $G_1G_4$, $G_2G_5$ i $G_3G_6$ przecinają się w jednym punkcie.

**45.** W talii jest $n$ ponumerowanych kart. Jeśli pierwsza karta od góry ma numer $k$, szuler podnosi pierwszych $k$ kart, łącznie z tą kartą i kładzie je na wierzchu w odwróconej kolejności. Następnie sprawdza pierwszą kartę od góry itd. Udowodnij, że po skończonej ilości ruchów karta 1 trafi na wierzch.

**46.** $x, y, z$ są dodatnie i spełniają równanie

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} = \frac{x^2}{z} + \frac{z^2}{y} + \frac{y^2}{x}$$

Pokazać, że co najmniej dwie spośród liczb $x, y, z$ są równe.

## Zadania - dzień trzeci

grupa starsza

czwartek, 28 września 2006

**41.** Dany jest trójkąt $ABC$ o kątach odpowiednio $20°, 50°, 110°$. Punkt $D$ leży na boku $AC$ i punkt $E$ leży na boku $AB$. Kąt $\angle ACE$ jest równy $30°$. Kąt $\angle DBA$ jest równy $20°$. Obliczyć $\angle DEC$. You're requested to make a sinus trial ; )

**43.** Pokazać, że wśrod 100 kolejnych wyrazów ciągu $a_n = n^8 + n^6 + n^4 + n^2 + 1$ jest conajmniej 86 liczb złożonych.

**46.** $x, y, z$ są dodatnie i spełniają równanie

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} = \frac{x^2}{z} + \frac{z^2}{y} + \frac{y^2}{x}$$

Pokazać, że co najmniej dwie spośród liczb $x, y, z$ są równe.

**47.** Sześciokąt $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ wpisany jest w okrąg. Oznaczmy przez $H_i$ ortocentrum trójkąta $A_{i-1}A_iA_{i+1}$ dla $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, gdzie $A_0 = A_6$ i $A_7 = A_1$. Pokazać, że proste $H_1H_4$, $H_2H_5$ i $H_3H_6$ przecinają się w jednym punkcie.

**48.** Znaleźć wszystkie $a > 1$ takie, że dla każdej funkcji ciągłej $f(x)$ spełniającej $f(0) = f(a)$ istnieje taki $x$, że $f(x) = f(x + 1)$.

# Zadania - dzień trzeci

grupa najstarsza

czwartek, 28 września 2006

**41.** Dany jest trójkąt $ABC$ o kątach odpowiednio $20°, 50°, 110°$. Punkt $D$ leży na boku $AC$ i punkt $E$ leży na boku $AB$. Kąt $\angle ACE$ jest równy $30°$. Kąt $\angle DBA$ jest równy $20°$. Obliczyć $\angle DEC$. You're requested to make a sinus trial ; )

**43.** Pokazać, że wśrod 100 kolejnych wyrazów ciągu $a_n = n^8 + n^6 + n^4 + n^2 + 1$ jest conajmniej 86 liczb złożonych.

**47.** Sześciokąt $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ wpisany jest w okrąg. Oznaczmy przez $H_i$ ortocentrum trójkąta $A_{i-1}A_iA_{i+1}$ dla $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, gdzie $A_0 = A_6$ i $A_7 = A_1$. Pokazać, że proste $H_1H_4$, $H_2H_5$ i $H_3H_6$ przecinają się w jednym punkcie.

**48.** Znaleźć wszystkie $a > 1$ takie, że dla każdej funkcji ciągłej $f(x)$ spełniającej $f(0) = f(a)$ istnieje taki $x$, że $f(x) = f(x + 1)$.

**49.** Niech $n$ będzie liczbą parzystą. Zbiór $S = \{a : n | a^{a-1} - 1\}$. Pokazać, że jeśli $S = \{n - 1\}$ to $n = 2p$ gdzie $p$ jest liczbą pierwszą.

**410.** Dowieść, że dla liczb dodatnich $a$,$b$,$c$, zachodzi nierówność

$$\frac{a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc}}{3} \leqslant \sqrt[3]{a \cdot \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a+b+c}{3}}$$