Triki z innej beczki

1. Pokazać, że liczba $\sum_{n=0}^{10^{10}} \binom{2\cdot 10^{10}}{2n} 5^n$ jest podzielna przez $2^{2\cdot 10^{10}-1}$.

2. Pokazać, że dla każdego k całkowitego dodatniego istnieje takie m całkowite dodatnie, że liczby $m, 2m, 3m, \ldots, m^2$ mają dokładnie po k jedynek w zapisie binarnym.

3. W rombie okrąg rozcina każdy z boków na 3 odcinki. Wszystkie 12 powstałych odcinków pokolorowano zgodnie z ruchem wskazówek zegara na biało, różowo i czarno, zaczynając od wierzchołka. Pokazać, że sumy długości odcinków białych i czarnych są równe.

4. Niech $S(x)$ oznacza sumę cyfr liczby x. Pokazać, że dla żadnego n liczba $S(2n^2+3)$ nie może być kwadratem liczby naturalnej.

5. Gópi Stach zaprosił swoich kumpli na przyjęcie, w sumie razem z nim było na nim $n \geqslant 4$ osób. Każdy z uczestników przyniósł przynajmniej jeden prezent i obdarował nim kogoś innego. Okazało się, że każdy z przyjezdnych dał trzy razy więcej prezentów niż sam uzyskał, ale Stach dostał sześć razy więcej prezentów niż dał. Wyznaczyć w zależności od n najmniejszą liczbę prezentów, jakie Stach mógł dostać.

6. Niech $f(n)$ oznacza ostatnią cyfrę liczby n. Oznaczmy przez a_i ciąg określony następującymi warunkami:

- $a_0 = x$
- $a_i = a_{i-1} + f(a_{i-1})$ dla $i > 0$

gdzie x jest liczbą całkowitą dodatnią niepodzielną przez 5. Znaleźć wszystkie d całkowite dodatnie, dla których nieskończenie wiele wyrazów ciągu dzieli się przez d.