

Hong Kong

1. Pokazać, że dla a, b, c rzeczywistych, takich że $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ zachodzi:

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \geq \frac{3}{2}$$

2. Suma cyfr liczby n wynosi 100, a liczby $44n$ wynosi 800. Ile wynosi suma cyfr liczby $3n$?

3. Niech ABC będzie trójkątem równoramiennym takim, że $AB = AC$. Punkt D leży na BC oraz spełnia $BD = 2CD$, zaś punkt P leży na AE oraz spełnia $\angle BAC = \angle BPD$. Pokazać, że $\angle BAC = 2\angle CPD$.

4. Rozwiązać w liczbach całkowitych dodatnich x, k, n równanie:

$$3^k - 1 = x^n$$

5. Dla liczby całkowitej dodatniej n znaleźć liczbę ciągów składających się z liter a, b, c , w których litera a występuje parzystą liczbę razy.

6. Niech M i N będą środkami boków AB i AC trójkąta ABC . Prosta k przechodzi przez punkt A , zaś Q i R to odpowiednio rzuty punktów B i C na nią. Znaleźć miejsce geometryczne punktów przecięcia prostych QM i RN dla zmiennej prostej k .

7. Niech ciąg $a_0, a_1, \dots, a_{2n+1}$ będzie ściśle rosnącym ciągiem liczb rzeczywistych dodatnich. Pokazać, że zachodzi:

$$\sqrt[n]{a_1} - \sqrt[n]{a_2} + \sqrt[n]{a_3} - \dots - \sqrt[n]{a_{2n}} + \sqrt[n]{a_{2n+1}} < \sqrt[n]{a_1 - a_2 + a_3 - \dots - a_{2n} + a_{2n+1}}$$