

Gry i inna kombinatoryka

1. Joasia i Onufry grają w grę: wybierają liczbę całkowitą dodatnią n i na przemian odejmują od niej liczbę od 1 do 9. Zaczyna Joasia, przegrywa gracz nie mogący wykonać ruchu (czyli ten, kto dostał 0). Dla jakich n Joasia, a dla jakich Onufry ma strategię wygrywającą?

2. Joasia i Onufry znowu grają w podobną grę, ale tym razem od liczby mogą odjąć 1, liczbę pierwszą bądź też iloczyn dwóch (niekoniecznie różnych) liczb pierwszych dzielących obecną liczbę. Zaczyna Joasia, przegrywa gracz nie mogący wykonać ruchu. Dla jakich n wygrywa Joasia, a dla jakich Onufry?

3. Joasia i Onufry grają w grę na okrągłym stoliku o średnicy $1m$ kładąc naprzemian monety o średnicy $1cm$. Monety nie mogą zachodzić na siebie, zaczyna Joasia, przegrywa nie mogący wykonać ruchu. Kto ma strategię?

4. Onufry z Joasią grają na nieskończonej szachownicy w grę. Naprzemian kładą na szachownicę swoje kamienie, Onufry wygrywa jeśli utworzy ze swoich kamieni kwadrat 2×2 , Joasia chce mu przeszkodzić. Pokazać, że Joasia może grać tak, aby Onufry nigdy nie wygrał.

5. Onufry i Joasia grają w grę. Na płaszczyźnie są narysowane 2002 wektory. Zaczyna Joasia i gracze na przemian zabierają ze zbioru narysowanych wektorów po jednym wektorze, aż do wyczerpania zapasów. Wygrywa ten, kto na końcu będzie miał dłuższą sumę wybranych wektorów, a w przypadku równej długości ogłaszany jest remis. Rozstrzygnąć, czy niezależnie od początkowego zbioru wektorów Joasia zawsze może nie przegrać z Onufrym.

6. Joasia i Onufry grają w grę na początku mają n słupków monet i w każdym ruchu gracze naprzemian zdejmują dowolną liczbę monet, ale tylko z jednego słupka. Rozstrzygnąć, dla jakich wysokości słupków wygrywa zaczynająca Joasia, a dla jakich Onufry, jeśli wygrywa gracz zdejmujący ostatnie monety.

7. A co by było, gdyby mogli zdejmować z co najwyżej k różnych słupków?

8. Joasia i Onufry grają w grę na długiej planszy $1 \times n$. Na każdym polu planszy może stać kamień, ale co najwyżej jeden. W każdym ruchu gracz może dowolny kamień przesunąć na wolne pole po prawej, albo przeskoczyć nim całą grupę kolejno stojących kamieni po prawej i usadowić na pierwszym wolnym polu dalej. Zaczyna Joasia, przegrywa gracz nie mogący wykonać ruchu. Dla jakich ustawień kamieni kto ma strategię wygrywającą?

9. Joasia z Onufrym grają w grę na szachownicy złożonej z n wierszy i m kolumn. Na początku w każdym wierszu jest ustawiony pionek Joasi i pionek Onufrego, przy czym Joasi leży na lewo od Onufrego. W każdym ruchu gracze naprzemian przesuwają wybrany ze swoich pionków ale tylko w jego rzędzie, nie mogą przy tym przeskakiwać pionka przeciwnika. Zaczyna Joasia. Dla jakich ustawień początkowych pionków Joasia, a dla jakich Onufry ma strategię wygrywającą?