

KÓŁECZKO Z GRAFÓW (15.10.06)

1. TEORIA

1.1. Graf - wierzchołki i krawędzie między nimi.

1.2. Standardowe oznaczenia G - graf; V - zbiór wierzchołków; E - zbiór krawędzi; $deg(v)$ - stopień wierzchołka (liczba krawędzi wychodzących z danego wierzchołka).

1.3. Graf spójny to taki, w którym da się przejść z każdego wierzchołka do każdego. Drzewo, to graf spójny, nie mający cyklu.

Graf planarny to taki, który można narysować na płaszczyźnie tak, by jego krawędzie się nie przecinały.

Graf dwudzielny to taki, którego wszystkie wierzchołki da się podzielić na dwa podzbiory takie, że każda krawędź łączy wierzchołki z różnych podzbiorów.

2. ZADANKA

2.1. W pokoju jest n wyłączników światła, przy czym światło zapala się tylko wtedy, gdy wszystkie wyłączniki są ustawione na zapalenie. Ile maksymalnie trzeba będzie wykonać przełączeń, stosując optymalny algorytm, aby zapalić światło?

2.2. W pewnym państwie jest n miast, w tym jedna stolica, niektóre z nich są połączone jednokierunkowymi drogami. Wiadomo, że ze stolicy można dojechać do każdego miasta oraz, że z każdego miasta wychodzi tyle samo dróg, co do niego wchodzi. Pokazać, że z każdego miasta można dojechać do stolicy.

2.3. W turnieju GO brało udział n graczy. Każdy rozegrał z każdym jeden mecz i nie było remisów. Udowodnić, że istnieje gracz, który ograł każdego innego gracza pośrednio lub bezpośrednio (tzn. ograł innego gracza, który go ograł).

2.4. Pokazać, że graf jest dwudzielny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jego cykle są parzystej długości.

2.5. Na przyjęciu spotkało się n osób ($n \geq 5$). Wiadomo, że wśród dowolnych 3 osób pewne dwie znają się. Dowiedzieć, że spośród uczestników przyjęcia można wybrać nie mniej niż $n/2$ osób i posadzić przy okrągłym stole tak, aby każdy siedział między dwoma swoimi znajomymi.

2.6. Niech w , k , s oznaczają odpowiednio liczby: wierzchołków, krawędzi i ścian wielościanu. Czy istnieje taki wielościan, w którym:

- $w = 8, k = 14, s = 8$,
- $w = 8, k = 15, s = 9$,
- $w = 13, k = 35, s = 24$,
- $w = 25, k = 37, s = 14$?