KÓŁECZKO Z GRAFÓW - CZĘŚĆ II (23.01.08)

1. TEORIA

1.1. Cykl Hamiltona to cykl, ktoży przechodzi przez wszystkie wierzchołki i przedz każdy dokładnie raz.

Cykl Eulera to cykl, który przechodzi przez każdą krawęd"x dokładnie raz.

1.2. Tw. Orego

Jeśli graf jest spójny, n - liczba jego wierzchołków spełnia $n > 3$ oraz dla każdej pary wierzchołków niepołączonych krawędzią suma ich stopni jest większa lub równa n, to wtedy graf ma cykl Hamiltona.

1.3. Wniosek Diraca

Jeśli graf ma n wierzchołków i stopień każdeg wierzchołka wynosi co najmniej $\frac{n}{2}$, to graf ma cykl Hamiltona.

1.4. Twierdzenie Halla

Jeśli mamy n chłopców i $m \geqslant n$ dziewczynek i każda grupa k chłopców połączywszy swoją wiedzę zna niemniej niż k dziewczynek, to można każdemu z chłopców dobrać znaną mu partnerkę, tak aby pary były rozłączne.

2.ZADANKA

2.0. Pokazać, że graf ma cykl Eulera wtedy i tylko wtedy gdy stopień każdego wierzchołka jest parzysty.

2.1. Na ucztę do Merlina przybyło $2n$ rycerzy. Każdy z nich ma wśród przybyłych co najwyżej $n-1$ wrogów wśród przybyłych. Pokazać, że Merlin może ich usadzić przy okrągłym stole tak, aby 2 wrogów nie siedziało obok siebie.

2.2. Dana jest tablica korkowa 20×20, podzielona na 400 kwadratów jednostkowych oraz 400 ogłoszeń, każde o polu 1, którymi da się pokryć całą tablicę. Wykazać, że można tak wbić 400 szpilek, żeby każde ogłoszenie było przypięte i żeby żadne dwie szpilki nie były wbite w ten sam kwadrat tablicy.

2.3. Z kompletu domina usuwamy kostki $0-1$, $0-2$ i $0-3$. Ile jeszcze trzeba jeszcze kostek usunąć, żeby z pozostałych dało się ułożyć zamknięty łańcuch?

2.4. Mówimy, że prostokąt (szachownica w kształcie prostokąta) $n \times m$, $n \geqslant m$ jest łaciński, gdy wpisano w niego liczby od 1 do n tak, że w każdym wierszu i w każdej kolumnie żadne dwie liczby nie są takie same. Wykaż, że każdy prostokąt łaciński można dopełnić do kwadratu łacińskiego.

2.5.

2.6. Dana jest tablica $N \times N$, w każdym jej polu jest wpisana pewna liczb rzeczywista tak, że suma liczb w każdej kolumnie jest taka sama i suma liczb w każdym wierszu jest taka sama. Dozwolony jest następujący ruch: wybieramy N pól tak, że żadne dwa nie leżą w jednym wierszu lub w jednej kolumnie i dodajemy do wszystkich dowolną liczbę (do wszystkich tę samą). Udowodnij, że w skończonej liczbie ruchów można otrzymać tablicę wypełnioną zerami.