Wykład o grafach

DEF. Graf to uporządkowana para zbiorów (V, E), gdzie V to wierzhołki, a E to krawędzie, czyli pary elementów z V. Jeśli pary są uporządkowane, to graf jest skierowany, w przeciwnym razie nieskierowany.

DEF. Graf spójny to taki nieskierowany, że z każdego wierzhołka da się przejść po krawędziach do każdego innego. Jeśli graf jest niespójny, to można go podzielić na spójne składowe, czyli maksymalne spójne podgrafy.

DEF. Drzewo jest grafem spójnym nieposiadającym cykli. Graf złożony z drzew nazywamy lasem.

ĆW. Pokazać, że drzewo o n wierzchołkach ma $n - 1$ krawędzi.

DEF. Niech $S(v)$ oznacza zbiór sąsiadów wierzchołka v.

DEF. Graf dwudzielny to taki, którego wierzchołki da się podzielić na dwa podzbiory tak, aby nie było krawędzi między dwoma wierzchołkami z tego samego podzbioru.

DEF. DFS-em nazywamy procedurę przeszukującą graf w następujący sposób:

```
procedure DFS(gdzie in V)
begin
    bylo[gdzie]=k++;
    for each v in S(gdzie)
    begin
        if (bylo[v]==0) DFS(v);
    end;
end;
```

ZAD0. Pokazać, że jeśli w spójnym grafie stopień każdego wierzchołka jest parzysty, to graf posiada cykl Eulera.

ZAD1. Znaleźć wszystkie takie grafy o n wierzchołkach, dla których da się dobrać tak zbiór mniej niż n krawędzi, aby z każdego wierzchołka wychodziła nieparzysta liczba krawędzi z tego zbioru.

ZAD2. Pokazać, że w grafie spójnym, w którym stopień każdego wierzchołka wynosi co najmniej 2 da się tak ponumerować krawędzie liczbami od 1 do liczby krawędzi, by NWD krawędzi wychodzących z każdego wierzchołka wynosiło 1.

DEF. BFS-em nazywamy procedurę przeszukującą graf w następujący sposób:

```
procedure BFS(pocz in V)
begin
    kol[0]=pocz;
    kolk=0;
    kolp=0;
    while (kolk<=kolp)
    begin
        gdzie=kol[kolk];
        kolk++;
        for each v in S(gdzie)
```

```
        begin
            if (bylo[v]==false)
            begin
                bylo[v]=true;
                kolp++;
                kol[kolp]=v;
            end;
        end;
    end;
end;
```

ZAD1. Pokazać, że graf jest dwudzielny wtedy i tylko wtedy, gdy nie posiada cyklu nieparzystej długości.

TW. (Ore) Jeśli w grafie dla każdej pary wierzchołków niepołączonych krawędzią suma ich stopni wynosi conajmniej n, to w grafie istnieje cykl Hamiltona.

ZAD1. Na przyjęciu spotkało sie n osób ($n \geqslant 5$). Wiadomo, ze wśród dowolnych trzech osób pewne dwie znają się. Dowieść, ze spośród uczestników przyjęcia można wybrać nie mniej niż $n/2$ osób i posadzić przy okrągłym stole tak, aby każdy siedział między dwoma swoimi znajomymi.

JESZCZE ZADANKO NA MYŚLENIE GRAFOWE

ZAD1. Ogrodnik Hofman opiekuje się, e swoim ogrodem mającym kształt nieskończonej płaszczyzny z układem współrzędnych. Na wiosnę Hofman przygotowuje skonczoną liczbę miejsc w punktach kratowych (czyli tych o współrzędnych całkowitych) w których ma zamiar posadzić róże bądź też goździki. Pokazać, że Hofman może w ten sposób posadzić w odpowiednich miejscach róże, a w pozostałych goździki (po jednym kwiacie na kazdym miejscu), aby na kazdej prostej równoległej do którejkolwiek z osi układu współrzędnych liczba posadzonych róż i goździków różniła się co najwyżej o 1.

TW. (Hall) W grafie dwudzielnym, jeśli dla każdego podzbioru A k wierzchołków z jednej strony co najmniej k różnych wierzchołków z drugiej strony jest połączonych krawędzią z wierzchołkiem z A, to da się każdemu wierzchołkowi z pierwszej strony doparować inny wierzchołek z drugiej strony.

ZAD1. Tablica ogłoszeń na warsztaty ma kształt tablicy 2006×1 podzielonej na 2006 sekcji 1×1. Złośliwy Onufry kazał Joasi przypiąć do tablicy 2006 ogłoszeń, każde o polu 1 w z góry przez niego ustalonych miejscach (przy czym ogłoszenie może mieć dowolny kształt, może nawet nie być spójne). Pokazać, że Joasia może tak przypiąć ogłoszenia szpilkami, aby każde ogłoszenie było przypięte dokładnie jedną szpilką i aby w każdej sekcji była użyta dokładnie jedna szpilka.