Grafy

1. W księstwie hofmańskim jest n miast w tym jedna stolica, niektóre z nich połączone są jednokierunkowymi drogami. Wiadomo, że z każdego miasta wychodzi tyle samo dróg co wchodzi oraz że ze stolicy można dojechać do każdego miasta. Pokazać, że w każdego miasta można dojechać do stolicy.

2. W grupie $n \geqslant 3$ osób każda ma parzystą (być może zerową) liczbę znajomych. Pokazać, że istnieją trzy osoby mające taką samą liczbę znajomych.

3. W turnieju tenisowym brało udział n graczy. Każdy rozegrał z każdym innym jeden mecz przy czym w tenisie nie ma remisów. Udowodnić, że istnieje taki gracz A, który pokonał każdego innego gracza B bezpośrednio lub pośrednio, tzn. A wygrał z B, lub A pokonał pewnego przeciwnika C, który wygrał z B.

4. W sali jest n chłopców i $l \geqslant n$ dziewcząt. Wiadomo, że każda grupa k chłopców, gdzie $1 \leqslant k \leqslant n$, zna przynajmniej k dziewcząt. Pokazać, że każdemu chłopcu można przyporządkować dziewczynkę do tańca tak, by wszyscy chłopcy znali swoje partnerki.

5. Pokazać, że graf jest dwudzielny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jego cykle są parzystej długości.

6. Na przyjęciu spotkało sie n osób ($n \geqslant 5$). Wiadomo, że wsród dowolnych trzech osób pewne dwie znają się. Dowieść, że spośród uczestników przyjęcia można wybrać nie mniej niż $n/2$ osób i posadzić przy okrągłym stole tak, aby każdy siedział między dwoma swoimi znajomymi.