Wektorki i inne

1. Sfery γ_1 i γ_2 są styczne do siebie zewnętrznie i obie wewnętrznie do sfery Γ. Sfery $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ są styczne do Γ,γ_1,γ_2 oraz każda do następnej i poprzedniej w ciągu (rozumianym cyklicznie). Pokazać, że $n = 6$.

2. Okręgi ω_1 i ω_2 przecinają się w punktach X i Y oraz są styczne wewnętrznie do okręgu Ω w punktach P i Q odpowiednio. Prosta k jest styczna do ω_1 w A i do ω_2 w B przy czym oba te okręgi leżą po tej samej stronie prostej k. Pokazać, że proste XY, PA i QB przecinają się na okręgu Ω.

3. Cztery proste na płaszczyźnie tworzą cztery trójkąty. Pokazać, że okręgi opisane na tych trójkątach przecinają się w jednym punkcie.

4. Pokazać, że środki okręgów z zadania 3 leżą na jednym okręgu.

5. Punkty Q i R leżą na okręgu γ. Punkt P jest przecięciem stycznych do okręgu przechodzących przez Q i R. Punkt A leży na przedłużeniu PQ bliżej Q niż P. Okręg opisany na trójkącie APR przecina okrąg γ w punkcie B, zaś prosta AR przecina γ w C. Pokazać, że $\angle PAR = \angle ABC$.

6. Trójkąt ABC ma kąt prosty przy wierzchołku C. Dwusieczne kątów przy wierzchołkach A i B przecinają boki BC i AC odpowiednio w P i Q. Niech M i N będą rzutami prostopadłymi odpowiednio P i Q na AB. Znaleźć miarę kąta $\angle MCN$.

7. Okręgi C_1 i C_2 przecinają się w punktach M i N, zaś ich wspólna styczna jest do nich styczna w punktach P i Q odpowiednio, gdzie prosta PQ jest bliżej punktu N niż M. Prosta PN przecina okrąg C_2 w punktach N i R. Pokazać, że prosta MQ jest dwusieczną kąta PMR.