Garść geometrii i innych zadań

1. Okrąg O jest styczny do dwóch równoległych prostych l_1 i l_2. Okrąg O_1 jest styczny do l_1 w A i zewnętrznie do O w C. Okrąg O_2 jest styczny do l_2 w B, zewnętrznie do O w D i do O_1 w E. Proste AD i BC przecinają się w Q. Pokazać, że Q jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie CDE.

2. Niech D będzie punktem wewnętrznym boku BC trójkąta ABC. Prosta AD przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w X. Niech P i Q będą rzutami X na proste AB i AC odpowiednio. Udowodnij, że prosta PQ jest styczna do okręgu o średnicy XD wtedy i tylko wtedy, gdy $AB = AC$.

3. W trójkącie ABC punkt D jest środkiem boku AB zaś E dzieli bok BC w stosunku $2:1$. Zanjdź miarę kąta BAC jeśli kąty ADC i BAE są przystające.

4. Wypukły czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Symetralne odcinków AB i AC przecinają prostą AD odpowiednio w punktach W,V nie leżących na odcinku AD, przy czym $DV < AV$ i $DW > AW$. Proste BW i CV przecinają się w T. Pokazać, że $|BT - CT| = AD$.

5. Spośród liczb od 1 do 100 wybrano 25 liczb. Pokazać, że jest wśrod nich podzbiór o iloczynie będącym kwadratem liczby całkowitej.

6. Dany jest zbiór A 1985 liczb całkowitych takich, że żadna nie ma dzielnika pierwszego większego niż 23. Pokazać, że da się spośród nich wybrać 4 liczby tak, by ich iloczyn był czwartą potęgą liczby całkowitej.

7. Wielomian $W(x)$ o współczynnikach całkowitych ma stopień n. Pokazać, że liczba rozwiązań równania $|W(x)| = 1$ w $x \in \mathbb{Z}$ nie przekracza $n + 2$.