**Trochę geometrii**

**1.** Zewnętrzne styczne okręgów $o_1$ i $o_2$ to $k$ i $l$. Prosta $k$ jest styczna do $o_1$ w $A$, zaś prosta $l$ do $o_2$ w $B$. Okrąg $o_1$ przecina prostą $AB$ w punktach $A$ i $E$ zaś okrąg $o_2$ w $B$ i $F$. Pokazać, że $AE = BF$.

**2.** Czworokąt $ABCD$ wpisany jest w okrąg, zaś proste $AB$ i $CD$ przecinają się w $G$ a proste $AD$ i $BC$ w $H$. Pokazać, że dwusieczne kątów $\angle AGC$ i $\angle BHD$ są prostopadłe.

**3.** Czworokąt $ABCD$ wpisany jest w okrąg. Proste $AB$ i $CD$ przecinają się w $G$ zaś proste $AD$ i $BC$ w $H$. Dwusieczne kątów $\angle AGC$ i $\angle BHD$ nazywają się odpowiednio $k$ i $l$ oraz przecinają się w punkcie $P$. Punkty $K$ i $L$ należą odpowiednio do prostych $k$ i $l$ oraz spełniają warunki $KH \perp GH$ i $LG \perp GH$. Pokazać, że $\frac{PK}{PL} = \frac{PH^3}{PG^3}$.

**4.** Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, zaś $K$,$L$,$M$,$N$ są środkami boków $AB$,$BC$,$CD$ i $DA$ odpowiednio. Odcinki $KM$ i $LN$ przecinają się w S. Pokazać, że:

$$[AKSN] + [CMSL] = [BLSK] + [DNSM]$$

**5.** W okręgu $o$ wybrano średnicę $AB$ oraz punkt $C$ różny od $A$ i od $B$. Styczna do okręgu w punkcie $C$ przecina przedłużenie $AB$ w punkcie $D$. Pokazać, że dwusieczna kąta $CDA$ odcina z kąta $ACB$ trójkąt równoramienny.

**6.** W kąt $XPY$ wpisano dwa rozłączne okręgi o różncych promieniach styczne do jego ramion. Wewnętrzna styczna tych okręgów jest styczna do większego okręgu w $E$ i do mniejszego w $F$. Ponadto ta styczna przecina ramię $XP$ w $A$ i $YP$ w $B$. Pokazać, że $AE = BF$.

**7.** W trójkącie $ABC$ $I$ jest środkiem okręgu wpisanego, $K$ jego rzutem na bok $BC$ zaś $K'$ odbiciem $K$ względem $I$. Ponadto $M$ jest środkiem boku $BC$. Prosta $AK'$ przecina bok $BC$ w punkcie $D$. Prosta $AM$ oraz $ID$ przecinają się w punkcie $P$. Pokazać, że $[API] = [DPM]$.

**8.** Okrąg $\Omega$ opisany jest na trójkącie ostrokątnym $ABC$.Okręgi $\omega_1$ i $\omega_2$ mają środki odpowiednio w środkach krótszych łuków $BC$ i $AC$ oraz są styczne odpowiednio do cięciw $BC$ i $AC$. Pokazać, że środek okręgu wpisanego w trójkąt $ABC$ leży na wspólnej stycznej $\omega_1$ i $\omega_2$.