Geometria na specjalne życzenie Macieja

Geometria 1. Niech ABC będzie dowolnym trójkątem, oraz niech AMB,BNC,CKA będą trójkątami równobocznymi zbudowanymi na jego bokach (na zewnątrz). Przez środek MN została poprowadzona prostopadła do AC. Analogicznie prowadzimy prostopadłe do AB i BC. Udowodnij, że te trzy proste przecinają się w jednym punkcie...

Geometria 2. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków AB i AC w punktach odpowiednio P i Q. Punkty R i S są środkami boków AC i BC. Proste RS i PQ przecinają się w punkcie T. Udowodnij, że T leży na dwusiecznej kąta B...

Geometria 3. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Niech M będzie środkiem przecięcia jego przekątnych. Dwusieczna kąta ACD przecina prostą AB w punkcie K. Mamy także

$$MA \cdot MC + MA \cdot CD = MB \cdot MD$$

Udowodnij, że kąty $\angle BKC$ i $\angle CDB$ są równe.

Geometria 4. Niech AC będzie najdłuższym bokiem ABC, i niech $N \in AC$. Symetralna odcinka AN przecina AB w K a symetralna odcinka NC przecina BC w M. Pokazać, że punkty $K, M.B, O$ leżą na jednym okręgu, gdzie O- środek okręgu opisanego na ABC.

Geometria 5. Dany jest równoległobok $ABCD$ oraz punkt P leżący w jego wnętrzu taki, że środek AD jest równoodległy od P i C, a środek CD jest równoodległy od P i A. Niech Q będzie środkiem PB. Udowodnij, że $\angle PAQ = \angle PCQ$.

Geometria 6. Dany jest czworokąt $ABCD$ wpisany w okrąg. Niech X będzie punktem przeciecia jego przekątnych. Okręgi opisane na ABX i CDY przecinają się ponownie w punkcie Y. Punkt Z jest tak dobrany, że trójkąty ADY i BCZ są podobne. Udowodnij, że jeżeli czworokąt $BZCY$ jest wypukły, to można weń wpisać okrąg.

Stereometria. Dana jest sfera i płaszczyzna π przecinająca sferę na okręgu c. Punkty A, B należą do sfery, przy czym leżą po przeciwnych stronach π. Poza tym prosta łącząca A i środek sfery jest prostopadła do π. Płaczszyzna ζ zawierająca odcinek AB przecina c w punktach P i Q. Udowodnij, że $BP \cdot BQ$ nie zależy od wyboru płaszczyzny ζ.