Geometria ze zwróceniem uwagi na okrąg Feuerbacha

1. Dany jest trójkąt ABC i punkt P_0 na płaszczyźnie. Definiujemy rekurencyjnie: P_{3n+1} to obraz punktu P_{3n} względem punktu A o $120°$,P_{3n+2} to obraz punktu P_{3n+1} względem punktu B o $120°$,P_{3n+3} to obraz punktu P_{3n+2} względem punktu C o $120°$, gdzie n jest całkowite nieujmne. Pokazać, że $P_{2004} = P_0$ wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąt ABC jest równoboczny.

2. Niech $k_n = \operatorname{tg}(\sum_{i=1}^{n} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{n})$. Pokazać, że dla każdego n całkowitego dodatniego zachodzi $k_n(\frac{n-1}{k_{n-1}} - 1) - \frac{1}{k_{n-1}} = n$.

3.Dany jest trójkąt ostrokątny o ortocentrum H. Punkty M, N, K, L, P to środki odcinków odpowiednio AB, AC, CH, BH, BC zaś Q jest spodkiem wysokości poprowadzonej z punktu A. Proste PM i NL przecinają się w punkcie X a proste KM i NQ w Y. Pokazać, że $XY \| BC$.

4. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Punkty M, N są odpowiednio odbiciami punktu A względem punktów B i C. Prosta k przechodzi przez punkt B i jest prostopadła do prostej AB oraz przecina prostą AC w punkcie K. Prosta l przechodzi przez punkt C i jest prostopadła do prostej AC oraz przecina prostą AB w punkcie L. Proste k i l przecinają się w P. Pokazać, że punkty K, N, M, L, P leżą na jednym okręgu.

5.Okręgi o_1, o_2, o_3 przecinają się wszystkie w punkcie P, zaś punkty A, B, C są odpowiednio drugimi punktami przecięcia par okręgów o_2, o_3;o_1, o_3;o_1, o_2. Ponadto wiadomo, że proste PA, PB, PC zawierają odpowiednio średnice okregów o_1, o_2, o_3. Pokazać, że punkty A, B, C leżą na okręgu opisanym na trójkącie o wierzchołkach w środkach okręgów o_1, o_2, o_3.

6. W trójkącie ostrokątnym ABC O to środek okręgu opisanego, H to ortocentrum zaś K, L, M to odpowiednio środki odcinków AH, BH, CH. Proste przechodzaća e przez punkty K, L, M odpowiednio i odpowiednio prostopadłe do prostych OA, OB, OC wycinajĄ z płaszczyzny trójkąt XYZ. Pokazać, że ma on pole niemniejsze niż trójkąt ABC.

7. Dany jest trójkąt ABC na którego zewnątrz dobudowano prostokąty $ABKL$,$BCMN$,$CAOP$. Pokazać, że w jednym punkcie przecinają się:

(a) dwusieczne kątów $\angle OAL$,$\angle KBN$,$\angle MCP$

(b) przedłużenia promieni okręgów opisanych na trójkątach OAL,KBN,MCP poprowadzonych z punktów A, B, C odpowiednio.

(c) przedłużenia wysokości trójkątów OAL,KBN,MCP spuszczonych z punktów A, B, C odpowiednio

(d) symetralne odcinków OL,KN,MP.