**Same łatwe zadania (czyli pierwsze kółko Przemka :P)**

**Definicja 1.** *Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej $n$,* ciąg Fareya $F_n$ *jest ciągiem liczb wymiernych* $\frac{a}{b}$ *z* $0 \leqslant a < b \leqslant n$ *i* $(a,b) = 1$ *ułożonym rosnąco. Przykład:* $F_3 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\}$.

**1.** Udowodnić, że jeżeli $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}$ są kolejnymi elementami ciągu Fareya $F_n$ to zachodzi:

$$p_2q_1 - p_1q_2 = 1$$

oraz

$$\frac{p_1 + p_3}{q_1 + q_3} = \frac{p_2}{q_2}$$

.

**2.** Niech $a, b, c$ będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi, które spełniają warunek $a+b+c = 3$. Pokazać, że:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geqslant ab + bc + ca$$

**3.** *(tw. Steinera)* Dany jest trójkąt $ABC$ i punkt $D \in BC$. Niech $E$ leży na $BC$. Pokazać, że $\frac{BD}{CD} \cdot \frac{BE}{CE} = \frac{AB^2}{AC^2} \iff \angle BAD = \angle CAE$.

**Definicja 2.** *Symediana to obraz środkowej przy odbiciu względem dwusiecznej.*

**4.** Punkt $L$ leży na boku $AB$ trójkąta $ABC$, przy czym prosta $CL$ jest symedianą trójkąta $ABC$. Punkt $K$ leży na odcinku $CL$. Proste $AK$ i $BK$ przecinają boki $BC$ i $CA$ odpowiednio w punktach $D$ i $E$. Proste $DE$ i $AB$ przecinają się w punkcie $P$. Wykazaż, że prosta $CP$ jest styczna do okręgu opisanego na trójkącie $ABC$.

**5.** Pokazać, że dla każdego naturalnego $s < p$, gdzie $p$ jest liczbą pierwszą, istnieją liczby całkowite $x, y$ takie, że $s \equiv x^2 + y^2 \ mod \ p$.

**6.** Niech $x_1, \ldots, x_n$ i $y_1, \ldots, y_n$ będą liczbami rzeczywistymi. Niech $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ będzie macierzą, w której $a_{ij} = 1$ gdy $x_i + x_j \geqslant$ oraz $a_{ij} = 0$ w przeciwnym przypadku. Niech $B$ będzie macierzą $n$ na $n$ o elementach $0, 1$ i własności, że suma elementów w każdym wierszu i w każdej kolumnie jest równa odpowiadającej sumie macierzy $A$. Pokazać, że $A = B$.

**7.** Pokazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich $a, b, c$ zachodzi:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 \geqslant 2(ab + bc + ca)$$

**Definicja 3.** *Generator modulo $p$, dla $p$ pierwszej, to taka liczba całkowita $\lambda$, że $\lambda^k \not\equiv 1 \ mod \ p$ dla $k < p - 1$, tj. rząd $\lambda$ jest równy $p - 1$.*

**8.** Pokazać, że dla każdego naturalnego $n$ istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych $p$ takich, że najmniejszy generator modulo $p$ jest większy od $n$.