Zawody drużynowe

grupa młodsza

środa, 27 września 2006

31. Pokazać, że wśrod dowolnych 101 liczb całkowitych istnieje podzbiór o sumie podzielnej przez 101.

32. Na bokach BC i CD kwadratu $ABCD$ wybrano punkty M i K takie, że obwód trójkąta MCK jest dwa razy większy niż bok kwadratu. Znaleźć miarę kąta MAK.

33. Niech p będzie ustaloną liczbą pierwszą. Udowodnić, że liczba $\underbrace{11\ldots1}_{p}\underbrace{22\ldots2}_{p}\ldots\underbrace{99\ldots9}_{p}$ (każda cyfra występuje p razy) daje resztę 123456789 z dzielenia przez p.

34. Przy okrągłym stole siedzi n dzieci. Erika jest najstarszą spośród nich i ma n cukierków. Żadne inne dziecko nie ma cukierków. Erika postanawia rozdzielić cukierki według następującej zasady. W każdym ruchu dzieci mające co najmniej dwa cukierki podnoszą rękę. Erika wybiera jedno z nich, po czym wybrane dziecko daje po jednym cukierku swoim sąsiadom. (Zatem w pierwszym ruchu tylko Erika podnosi rękę i daje po jednym cukierku swoim sąsiadom.)
Dla jakich wartości $n \geqslant 3$ można doprowadzić do sytuacji, w której każde dziecko ma dokładnie jeden cukierek?

35. Dla jakich $n \geqslant 2$ układ równań:

$$\begin{cases} 4x_1^2 + 8x_2^2 = 33x_1x_2 \\ 4x_2^2 + 8x_3^2 = 33x_2x_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 4x_n^2 + 8x_1^2 = 33x_nx_1 \end{cases}$$

ma rozwiązanie w liczbach rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_n$?

36. Dwa okręgi Γ_1 i Γ_2 o różnych promieniach przecinają się w punktach A i B. Ich wspólne styczne to MN i ST przy czym M i S leżą na Γ_1 zaś N i T na Γ_2. Pokazać, że ortocentra trójkątów $\triangle AMN$, $\triangle AST$, $\triangle BMN$, $\triangle BST$ tworzą wierzchołki prostokąta.

37. Każdy wierzchołek 2006-kąta foremnego pokolorowano na jeden z 10 kolorów. Pokazać, że jeśli wśród dowolnych 100 kolejnych wierzchołków występują wszystkie kolory, to wśród pewnych 90 również.

Zawody drużynowe

grupa starsza

środa, 27 września 2006

34. Przy okrągłym stole siedzi n dzieci. Erika jest najstarszą spośród nich i ma n cukierków. Żadne inne dziecko nie ma cukierków. Erika postanawia rozdzielić cukierki według następującej zasady. W każdym ruchu dzieci mające co najmniej dwa cukierki podnoszą rękę. Erika wybiera jedno z nich, po czym wybrane dziecko daje po jednym cukierku swoim sąsiadom. (Zatem w pierwszym ruchu tylko Erika podnosi rękę i daje po jednym cukierku swoim sąsiadom.)
Dla jakich wartości $n \geqslant 3$ można doprowadzić do sytuacji, w której każde dziecko ma dokładnie jeden cukierek?

35. Dla jakich $n \geqslant 2$ układ równań:

$$\begin{cases} 4x_1^2 + 8x_2^2 = 33x_1x_2 \\ 4x_2^2 + 8x_3^2 = 33x_2x_3 \\ \dots\dots\dots\dots \\ 4x_n^2 + 8x_1^2 = 33x_nx_1 \end{cases}$$

ma rozwiązanie w liczbach rzeczywistych $x_1, x_2, \dots, x_n$.

36. Dwa okręgi Γ_1 i Γ_2 o różnych promieniach przecinają się w punktach A i B. Ich wspólne styczne to MN i ST przy czym M i S leżą na Γ_1 zaś N i T na Γ_2. Pokazać, że ortocentra trójkątów $\triangle AMN$, $\triangle AST$, $\triangle BMN$, $\triangle BST$ tworzą wierzchołki prostokąta.

37. Każdy wierzchołek 2006-kąta foremnego pokolorowano na jeden z 10 kolorów. Pokazać, że jeśli wśród dowolnych 100 kolejnych wierzchołków występują wszystkie kolory, to wśród pewnych 90 również.

38. Funkcja $f(n)$ określona dla liczb całkowitych dodatnich i przyjmująca wartości całkowite dodatnie spełnia następujące warunki:

$$\begin{cases} f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 3 \\ f(2k) = 2f(k) \\ f(4k+1) = 4k+2 \\ f(4k+3) = 2f(2k+1) + 1 \end{cases}$$

dla liczb całkowitych dodatnich k. Niech x będzie liczbą całkowitą dodatnią, zaś nieskończony ciąg a_i będzie określony warunkami: $a_1 = x$ oraz $a_i = f(a_{i-1})$ dla $i > 1$. Pokazać, że dla dowolnego x ciąg a_i jest od pewnego miejsca stały i dla x w zbiorze $\{1, 2, \dots, 2^m - 1\}$ znaleźć maksymalną długość początku ciągu a_i, po którym ciąg staje się stały.

39. Znaleźć część całkowitą liczby:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{10000}}$$

310. Okrąg o środku O i promieniu R jest opisany na trójkącie ABC. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt, punkt D jest rzutem prostokątnym punktu A na prostą BC. Okrąg styczny do boku BC oraz do przedłużeń pozostałych boków tego trójkąta ma promień R. Dowieść, że punkty O, I, D są współliniowe.