Przyjazne drugie etapy

11.02.2009

1. W czworokącie wypukłym $ABCD$ punkt M jest środkiem przekątnej AC. Wykazać, że jeżeli $\angle BAD = \angle BMC = \angle CMD$, to na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.

2. Punkt A leży na zewnątrz okręgu o o środku O. Z punktu A poprowadzono dwie styczne do okręgu o odpowiednio w punktach B i C. Pewna styczna przecina odcinki AB i AC odpowiednio w punktach E i F. Proste OE i OF przecinają odcinek BC odpowiednio w punktach P i Q. Udowodnić, ze z odcinków BP, PQ i QC można zbudować trójkąt podobny do trójkąta AEF.

3. Niech $n \geqslant 3$ będzie liczbą naturalną. Dowieść, że dowolny wielomian postaci

$$x^n + a_{n-3}x^{n-3} + a_{n-4}x^{n-4} + a_{n-5}x^{n-5} + ... + a_1x + a_0,$$

gdzie co najmniej jeden ze współczynników $a_0, a_1, ..., a_{n-3}$ jest różny od zera, ma mniej niż n pierwiastków rzeczywistych (każdy pierwiastek liczymy tyle razy, ile wynosi jego krotność).

4. Dane są liczby naturalne k i n większe od 1, przy czym liczba $p = 2k - 1$ jest pierwsza. Dowieść, że jeśli liczba

$$\binom{n}{2} - \binom{k}{2}$$

jest podzielna przez p, to jest też podzielna przez p^2.

5. Sześcian S o krawędzi 2 jest zbudowany z ośmiu sześcianów jednostkowych. *Klockiem* nazwiemy bryłę otrzymaną przez usunięcie z sześcianu S jednego z ośmiu sześcianów jednostkowych. Sześcian T o krawędzi 2^n jest zbudowany z $(2^n)^3$ sześcianów jednostkowych. Udowodnić, ze po usunięciu z sześcianu T dowolnego spośród $(2^n)^3$ sześcianów jednostkowych powstanie bryła, którą daje się szczelnie wypełnić *klockami*.

6. Udowodnić, ze dla dowolnych liczb $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ zachodzi nierówność:

$$\sqrt[3]{abc} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant 2\sqrt{3}.$$

Kiedy w podanej nierówności zachodzi równość?