Różne różności i nieróżności

Zadanie 1. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 3$ istnieją nieparzyste liczby naturalne p i q takie, że

$$7p^2 + q^2 = 2^n$$

Zadanie 2. Ciąg $\{a_n\}$ jest zdefiniowany następująco: $a_1 = 1$, oraz $a_{n+1} = \frac{a_n}{n} + \frac{n}{a_n}$ dla $n \geqslant 1$. Pokazać, że dla $n \geqslant 4$ zachodzi $[a_n^2] = n$.

Zadanie 3. Niech H będzie ortocentrum trójkąta ostrokątnego ABC. Proste przechodzące przez punkt A są styczne do okręgu o średnicy BC w punktach P i Q. Pokazać, że punkty P, Q, H są współliniowe.

Zadanie 4. Znaleźć wszystkie liczby pierwsze p, q takie, że kongurencja modulo $3pq$

$$x^{3pq} \equiv x$$

zachodzi dla wszystkich naturalnych x.

Zadanie 5. Niech $x_1, x_2, ..., x_{n+1}$ będą takimi dodatnimi liczbami rzeczywistymi, że $x_1 + x_2 + ...x_n = x_{n+1}$. Pokazać, że

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i(x_{n+1} - x_i)} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_{n+1}(x_{n+1} - x_i)}$$

Zadanie 6. Czy istnieje skończony zbiór niezerowych liczb rzeczywistych taki, że dla każdego $n \in N$ istnieje wielomian stopnia co najmniej n, o współczynnikach z M, którego wszystkie pierwiastki są rzeczywiste i należą do M?

Zadanie 7. W trójkącie równoramiennym ABC $(AC = BC)$ O jest środkiem okręgu opisanego, I- środkiem okręgu wpisanego, a D leży na BC tak, że OD i BI są prostopadłe. Pokazać, że ID i AC są równoległe.