Dirichlet i insza kombinatoryka

1. W trójkącie równobocznym o boku długości 12 umieszczono 300 punktów. Pokazać, że pewne trzy z nich tworzą trójkąt (może być zdegenerowany) o obwodzie mniejszym równym od 3.

2. Na bokach AB i CD kwadratu $ABCD$ o boku długości 1 obrano odpowiednio punkty $X_1, X_2, \ldots, X_{1001}$ na AB i $Y_1, Y_2, \ldots Y_{1001}$ na CD. Pokazać, że łamana $AY_1X_1Y_2X_2\ldots Y_{1001}X_{1001}C$ ma długosć co najmniej $\sqrt{4012010}$.

3. W kwadracie o boku 26 umieszczono 100 kwadratów o boku 1. Pokazać, że istnieją dwa odległe o mniej niż 2.

4. Wykazać, że dla każdej liczby pierwszej p istnieją liczby całkowite x, y, k, spełniające warunek $0 < 2k < p$, takie, że:

$$kp + 3 = x^2 + y^2$$

.

5. Na płaszczyźnie dany jest skończony zbiór trójkątów równobocznych. Figura, która jest ich sumą, ma pole 16. Dowieśc, że spośrod tych trójkątów można wybrać podzbiór trójkątych o rozłącznych wnętrzach o sumie pól przynajmniej 1.

6. Dane są ciągi liczb $(x_1, x_2, \ldots, x_7)$ oraz $(y_1, y_2, \ldots, y_7)$, takie że dla każdego i zachodzi:

$$\begin{cases} x_i \geqslant 0 \\ y_i \geqslant 0 \\ x_i + y_i \leqslant 1 \end{cases}$$

Pokazać, że istnieją indeksy k, l że zachodzi $|x_k - x_l| + |y_k - y_l| \leqslant \frac{1}{2}$.

7. Dowieść, że kwadratowej szachownicy 43×43 z wyciętym środkowym polem nie da się podzielić na prostokąty 1×6.

8. Klockiem będziemy nazywać bryłe powstałą w wyniku wyrzucenia jednego z sześcianików jednostkowych z sześcianu $2\times2\times2$ złożonego z sześciańików jednostkowych. Pokazać, że dowolny sześcian $2^k \times 2^k \times 2^k$ z wyrzuconym dowolnym sześcianikiem jednostkowym da się zbudować z klocków.