

## Zadania z Dirichleta - wykład na 7WM

**0.** W trójkącie równobocznym o boku 10 umieszczono 201 punktów. Pokazać, że pewne dwa są w odległości mniejszej niż 1. A następnie pokazać, że przy 76 punktach również jest dobrze.

**1.** W kwadracie o boku 26 umieszczono 100 kwadratów o boku 1. Pokazać, że istnieją dwa odległe o mniej niż 2.

**2.** Na płaszczyźnie dany jest skończony zbiór trójkątów równobocznych. Figura, która jest ich sumą, ma pole 16. Dowieść, że spośród tych trójkątów można wybrać podzbiór trójkątów o rozłącznych wnętrzach o sumie pól przynajmniej 1.

**3.** Na płaszczyźnie jest umieszczonych nieskończenie wiele modliszek. Każda z nich może się poruszać z prędkością 5 metrów na minutę oraz na początku każde dwie oddalone są od siebie o co najmniej 2 metry. Jeśli dwie żywe modliszki spotkają się w tym samym punkcie, to jedna może zjeść drugą, zaś modliszka umiera po minucie od zjedzenia swojego ostatniego współbratymca. Pokazać, że po kwadransie wszystkie modliszki będą martwe.

**4.** Pokazać, że dla każdego  $p$  pierwszego istnieją takie  $x, y$  całkowite, że  $p \mid x^2 + y^2 - 1$ .

**5.** Wykazać, że dla każdej liczby pierwszej  $p$  istnieją liczby całkowite  $x, y, k$ , spełniające warunek  $0 < 2k < p$ , takie, że:

$$kp + 3 = x^2 + y^2$$

**6.** Dane są ciągi liczb  $(x_1, x_2, \dots, x_7)$  oraz  $(y_1, y_2, \dots, y_7)$ , takie że dla każdego  $i$  zachodzi:

$$\begin{cases} x_i \geq 0 \\ y_i \geq 0 \\ x_i + y_i \leq 1 \end{cases}$$

Pokazać, że istnieją indeksy  $k, l$  że zachodzi  $|x_k - x_l| + |y_k - y_l| \leq \frac{1}{2}$ .

**7.** Spośród liczb od 1 do 100 wybrano 26. Pokazać, że jest wśród nich niepusty podzbiór o iloczynie będącym kwadratem liczby naturalnej.

**8.** W księstwie Hofmańskim jest 66 pomników Hofmana. Pomiedzy każdymi dwoma istnieje połączenie obsługiwane przez jednego z 4 przewoźników. Pokazać, że istnieje trójka pomników, pomiędzy którymi połączenia obsługuje ten sam przewoźnik.

**9.** W turnieju ping-pongowym starły się dwie 1000-osobowe drużyny i każdy rozegrał mecz z każdym. Pokazać, że istnieje pewnych 10 zawodników z jednej drużyny takich, że każdy zawodnik z przeciwnej drużyny przegrał z którymś z nich.