Cztery trudne geometrie

1. W trójkącie ABC prostą zawierającą środkową wychodzącą z wierzchołka A odbito względem dwusiecznej kąta $\angle BAC$ tworząc prostą AD, gdzie D leży na boku BC. Punkt K należy do odcinka AD zaś proste BK i CK przecinają boki AC i AB odpowiednio w punktach E i F. Prosta EF przecina prostą BC w punkcie P. Pokazać, że prosta AP jest styczna do okręgu opisanego na trójkącie ABC.

2. Dany jest n-kąt foremny i jego dowolna triangulacja (czyli podział nieprzecinającymi się przekątnymi na trójkąty). We wszystkie powstałe trójkąty wpisano okręgi. Pokazać, że suma promieni tych okręgów nie zależy od doboru triangulacji.

3. Na płaszczyźnie jest umieszczonych nieskończenie wiele modliszek. Każda z nich może się poruszać z prędkością 5 metrów na minutę oraz na początku każde dwie oddalone są od siebie o co najmniej 2 metry. Jeśli dwie żywe modliszki spotkają się w tym samym punkcie, to jedna może zjeść drugą, zaś modliszka umiera po minucie od zjedzenia swojego ostatniego współbratymca. Pokazać, że po kwadransie wszystkie modliszki będą martwe.

4. Niech $ABCD$ będzie ustalonym czworokątem wypukłym, którego boki BC i AD są równej długości i nie są równoległe. Punkty E i F leżą odpowiednio na bokach BC i AD, są różne od wierzchołków A, B, C, D oraz $BE = DF$. Proste AC i BD przecinają się w punkcie P, proste BD i EF przecinają się w punkcie Q, proste EF i AC przecinają się w punkcie R. Rozpatrujemy wszystkie trójkąty PQR, dla zmieniających położenie punktów E i F. Dowieść, że okręgi opisane na tych trójkątach mają punkt wspólny, różny od punktu P.