Krasnale

05.11.2008

1. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA i AB odpowiednio w punktach P, Q, R. Prosta równoległa do BC, przechodząca przez A, przecina proste PQ i PR w punktach E i F. Wykazać, że A jest środkiem odcinka EF.

2. Dane są dwa różne punkty A i B. Znaleźć zbiór punktów styczności okręgów stycznych zewnętrznie takich, że jeden z nich jest styczny do prostej AB w punkcie A, a drugi – w punkcie B.

3. Podstawą ostrosłupa jest równoległobok $ABCD$, wierzchołkiem – punkt S, a spodkiem wysokości – punkt A. Okręgi wpisane w ściany SBC i SDC są styczne. Wykazać, że podstawą tego ostrosłupa jest romb.

4. Punkty P, Q i R należą odpowiednio do boków BC, CA i AB trójkąta ABC. Proste AP, BQ i CR przecinają się w punkcie S. Okrąg wpisany w czworokąt $PCQS$ jest styczny do QS w punkcie E, natomiast okrąg wpisany w $PBRS$ jest styczny do RS w punkcie F. Wykazać, że $EQ = FR$.

5. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boku AB w punkcie D. Prosta przechodząca przez środek boku BC i prostopadła do dwusiecznej kąta BAC przecina prostą AB w punkcie E. Udowodnić, że $BC = 2DE$.

6. Środkowe AP i CQ trójkąta ABC przecinają się w punkcie D. W czworokąt $BPDQ$ można wpisać okrąg. Wykazać, że $AB = BC$.

7. Dany jest ostrosłup czworokątny $ABCDS$ o podstawie czworokąta wypukłego $ABCD$. Sfera wpisana w ten ostrosłup jest styczna do ściany $ABCD$ w punkcie P. Dowieść, że

$$\angle APB + \angle CPD = 180^\circ$$