Czechy + okolice

1. Znaleźć wszystkie n całkowite dodatnie, dla których $2n+1|(n!)^2-1$.

2. W trójkącie ABC kąt ACB ma miarę 100°. Dwusieczna kąta ABC przecina bok AC w punkcie X, zaś punkt Y leży na boku AC i spełnia warunek $\angle YCB = 100^\circ$. Znaleźć miarę kąta YXB.

3. W trapezie prostokątnym bok AB jest podstawą, zaś kąt prosty jest przy wierzchołku A. Dwusieczne kątów przy wierzchołkach A i B przecinają się w punkcie S, zaś dwusieczne kątów przy wierzchołkach C i D w punkcie T. Punkt E jest przecięciem prostej DT i AB. Pokazać, że punkty B, S, E, T leżą na jednym okręgu.

4. Znaleźć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ dla których dla każdych $x, y \in \mathbb{R}^+$ zachodzi:

$$f(xf(y)) = f(xy) + x$$

5. Znaleźć wszystkie wielomiany $P(x)$ spełniające dla każdego x rzeczywistego równość:

$$(P(x))^2 + P(-x) = P(x^2) + P(x)$$

6. W trójkącie równoramiennym ABC zachodzi $AC = BC$. Na wysokości CD obrano punkt P taki, by okręgi wpisane w trójkąt APB i czworokąt $CEPF$ były przystające, gdzie E i F to odpowiednio przecięcia prostych AP i BP z bokami BC i AC. Pokazać, że wówczas również okręgi wpisane w trójkąty APD oraz BPC są przystające.

7. Znaleźć wszystkie liczby czterocyfrowe $\overline{abcd}$ spełniające zależność:

$$\overline{abcd} + 1 = (\overline{ac} + 1)(\overline{bd} + 1)$$