Chile

1. Znaleźć wszystkie liczby całkowite dodatnie m dla których istnieje takie całkowite dodatnie a, że $m|a^2+1$.

2. W trójkącie ABC zachodzi $\angle BAC = 2\angle ABC$. Pokazać, że $|BC|^2 = |AC|(|AC|+|AB|)$.

3. Niech C_1 i C_2 będą dwoma rozłącznymi okręgami o równych promieniach i środkach w O_1 i O_2. Prosta l jest równoległa do O_1O_2 i przecina oba okręgi. Punkty P_1 i P_2 leżą na prostej l zaś wszystkie punkty przecięcia l z okręgami C_1 i C_2 leżą na odcinku P_1P_2. Pokazać, że proste z punktu P_1 styczne do C_1 i proste z punktu P_2 styczne do C_2 wycinają z płaszczyzny czworokąt, w który da się wpisać okrąg.

4. Liczby całkowite dodatnie x, y spełniają równanie $3x^2 + x = 4y^2 + y$. Pokazać, że liczby $x - y$,$3x + 3y + 1$ oraz $4x + 4y + 1$ są kwadratami liczb całkowitych.

5. Dany jest równoległobok $ABCD$. Na przedłużeniu boku AB, po stronie B obrano taki punkt E, że $BE = BC$. Na przedłużeniu boku AD, po stronie D obrano taki punkt F, że $DF = CD$. Pokazać, że proste prostopadłe do prostych AB i AD przechodzące przez punkty E i F odpowienio, dwusieczna kąta $\angle EAF$ oraz prosta prostopadła do BD przechodząca przez C, przecinają się w jednym punkcie.

6. W trójkącie ABC o polu 1 punkt P leży na boku AB bliżej A niż B. Punkty Q, R, S leżą odpowiednio na bokach AC,BC i AB oraz spełniają warunki $PQ\|BC$,$QR\|AB$,$RS\|AC$. Znaleźć maksymalną możliwą wartość pola czworokąta $PQRS$.

7. Pokazać, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n istnieje n cyfrowa liczba, której cyfry należą do zbioru $\{1, 2\}$, podzielna przez 2^n.

8. Funkcja $f : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{Z}^+$ dla każdego $n \in \mathbb{Z}^+$ spełnia warunek:

$$f(n + f(n)) = 1$$

Wiedząc, że $f(2005) = 2$ znaleźć minimalną wartość sumy $f(1) + f(2) + \ldots + f(2006)$.

9. Znaleźć wszystkie n dla których istnieje ciąg $x_1, x_2, \ldots, x_n$ liczb ze zbioru $\{-1, 1\}$ spełniający równanie:

$$x_1x_2x_3x_4 + x_2x_3x_4x_5 + \ldots + x_{n-1}x_nx_1x_2 + x_nx_1x_2x_3 = 0$$