KÓŁECZKO Z CEVY I MENELAOSA (3.01.07)

1. TEORIA

1.1. Twierdzenie Cevy

Niech punkty X, Y, Z leżą odpowienio na bokach BC, AC i AB trójkąta ABC. Wtedy proste AX, BY, CZ przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy gdy

$$\frac{AZ}{BZ} \cdot \frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} = 1$$

.

1.2. Twierdzenie Menelaosa

Niech punkty Z i Y leżą odpowiednio na bokach AC i BC trójkąta ABC, a punkt X na przedłużeniu boku AB. Wtedy punkty X, Y, Z są współliniowe wtedy i tylko wtedy gdy

$$\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{CZ}{ZA} = 1$$

.

2. ZADANIA

2.1. Korzystając z twierdzenia Cevy udowodnić że w trójkącie ostrokątnym w jednym punkcie przecinają się: środkowe; dwusieczne; wysokości.

2.2. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do jego boków AB, BC, CA odpowiednio w punktach F, D, E. Udowodnić, że proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie.

2.3. W trójkącie ABC symetralna dwusiecznej AD przecina prostą BC w punkcie E. Dowieść, że $\frac{BE}{CE} = \frac{AB^2}{AC^2}$.

2.4. Dany jest trójkąt ABC i punkt P w jego wnętrzu. Proste AP, BP, CP przcinają boki trójkąta ABC odpowiednio w punktach A_1, B_1, C_1.Udowodnić, że proste przechodzące odpowiednio przez środki boków BC, AC i AB oraz równoległe odpowiednio do AP, BP i CP, przecinają się w jednym punkcie.

2.5. Z wierzchołka C kąta prostego trókąta ABC poprowadzono wysokość CK, a w trójkącie ACK poprowadzono dwusieczną CE. Prosta przechodząca przez punkt B, równoległa do CE przecina prostą CK w punkcie F. Udowodnić, źe prosta EF dzieli odcinek AC na połowy.

2.6. Wewnątrz trójkąta ABC leży punkt P. Proste AP, BP, CP przecnają boki trójkąta odpowiednio w punktach K, L, M. Wykazać, że $\frac{AP}{PK} = \frac{AL}{LC} + \frac{AM}{MB}$.

2.7. Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach BC i CA trójkąta ABC, przy czym $BD = AE$. Odcinki AD i BE przecinają się w punkcie P. Dwusieczna kata ACB przecina odcinki AD i BE odpowiednio w punktach Q i R. Wykazać, że $\frac{PQ}{AD} = \frac{PR}{BE}$.