KÓŁECZKO Z BRIANCHONA I PASCALA (16.01.08)

1. TEORIA

1.1. Twierdzenie Brianchona

W dowolnym sześciokącie 123456 opisanym na dowolnej stożkowej, czyli np. okręgu (są do niej styczne odcinki 12, 23, 34, 45, 56, 61) jego główne przekątne (14, 25 i 36) przecinają się w jednym punkcie lub są równoległe.
Twierdzenie Brianchona jest prawdziwe również dla sześciokątów zdegenerownych do pięciokątów i czworokątów.

1.2. Twierdzenie Pascala

Dla dowolnych sześciu punktów $1, 2, 3, 4, 5, 6$ leżących na jednej stożkowej (mogą się pokrywać), punkty przecięcia prostych 12 i 45, prostych 23 i 56 oraz prostych 34 i 61 (jeśli istnieją) leżą na jednej prostej.

2. ZADANIA

2.1. Dany jest czworokąt $ABCD$ opisany na okręgu. Boki AB, BC, CD, DA są styczne do tego okręgu odpowiednio w punktach W, X, Y, Z. Wykazać, że proste AC, BD, WY i XZ przecinają się w jednym punkcie.

2.2. Dany jest czworokąt $ABCD$ wpisany w okrąg oraz dowolny punkt X leżący w jego wnętrzu. Proste AX i DX przecinają ten okrąg w punktach odpowiednio M i N (różnych od A i D). Punkty E i F to odpowiednio punkty przecięcia prostych AM i CD oraz DN i AB. Udowodnić, że punkt przecięcia prostych MN i EF leży na prostej BC.

2.3. Dany jest trójkąt ABC. Rozpatrujemy wszystkie pary trójkątów ABX i ACY zbudowanych na zewnątrz trójkąta ABC, że $\angle XAB = \angle XAC = 30°$ oraz $\angle ABX = 180° - \angle ACY$. Wykazać, że wszystkie proste XY odpowiadające różnym parom takich trójkątów przecinają się w jednym punkcie.

2.4. Okrąg o środku I, wpisany w trójkąt ABC, jest styczny do boków BC i AC odpowiednio w punktach D i E. Punkt M jest środkiem boku AB. Odcinki DE i CM przecinają się w punkcie S. Wykazać, że proste AB oraz IS są prostopadłe.

2.5. Dany jest trójkąt ABC w którym $AB = AC$. Na bokach AB i AC obrano odpowiednio takie punkty P i Q, że w czworokąt $BCQP$ można wpisać okrąg. Punkt Z jest punktem styczności odcinka PQ do tego okręgu. Punkt X jest przecięciem prostych BQ i CP. Prosta AX przecina odcinek BC w punkcie Y. Udowodnić, że $\frac{PZ}{PB} + \frac{QZ}{QC} = \frac{AX}{AY}$.

2.6. Dany jest trójkąt ABC, w którym $BC = AC$. Punkty P i Q leża wewnątrz tego trójkata i spełniają zależności: $\angle PAC = \angle QBA$ oraz $\angle PBC = \angle QAB$. Dowieść, że punkty C, P i Q leża na jednej prostej.