

KÓŁECZKO Z BRIANCHONA I PASCALA (3.01.07)

1. TEORIA

1.1. Twierdzenie Brianchona

W dowolnym sześciokącie 123456 opisanym na dowolnej stożkowej, czyli np. okręgu (są do niej styczne odcinki 12, 23, 34, 45, 56, 61) jego główne przekątne (14, 25 i 36) przecinają się w jednym punkcie lub są równoległe.

Twierdzenie Brianchona jest prawdziwe również dla sześciokątów zdegenerowanych do pięciokątów i czworokątów.

1.2. Twierdzenie Pascala

Dla dowolnych sześciu punktów 1, 2, 3, 4, 5, 6 leżących na jednej stożkowej (mogą się pokrywać), punkty przecięcia prostych 12 i 45, prostych 23 i 56 oraz prostych 34 i 61 (jeśli istnieją) leżą na jednej prostej.

2. ZADANIA

2.1.

2.2. Dany jest czworokąt $ABCD$ wpisany w okrąg oraz dowolny punkt X leżący w jego wnętrzu. Proste AX i DX przecinają ten okrąg w punktach odpowiednio M i N (różnych od A i D). Punkty E i F to odpowiednio punkty przecięcia prostych AM i CD oraz DN i AB . Udowodnić, że punkt przecięcia prostych MN i EF leży na prostej BC .

2.3. Dany jest czworokąt $ABCD$ opisany na okręgu. Boki AB , BC , CD , DA są styczne do tego okręgu odpowiednio w punktach W , X , Y , Z . Wykazać, że proste ZC , BD , WY i XZ przecinają się w jednym punkcie.

2.4. Okrąg o środku I , wpisany w trójkąt ABC , jest styczny do boków BC i AC odpowiednio w punktach D i E . Punkt M jest środkiem boku AB . Odcinki DE i CM przecinają się w punkcie S . Wykazać, że proste AB oraz IS są prostopadłe.

2.5. Dany jest trójkąt ABC w którym $AB = AC$. Na bokach AB i AC obrano odpowiednio takie punkty P i Q , że w czworokąt $BCPQ$ można wpisać okrąg. Punkt Z jest punktem styczności odcinka PQ do tego okręgu. Punkt X jest przecięciem prostych BQ i CP . Prosta AX przecina odcinek BC w punkcie Y . Udowodnić, że $\frac{PZ}{PB} + \frac{QZ}{QC} = \frac{AX}{AY}$.

2.6.

2.7. Dany jest trójkąt ABC , w którym $BC = AC$. Punkty P i Q leżą wewnątrz tego trójkąta i spełniają zależności: $\angle PAC = \angle QBA$ oraz $\angle PBC = \angle QAB$. Dowieść, że punkty C , P i Q leżą na jednej prostej.