Dwustosunki i biegunowe

teoria do zadania 11.

wtorek, 14 grudnia 2004

I. Arsenał

1. Twierdzenie Menelausa (Menelaosa, jak kto woli)

Na płaszczźnie dane są trzy proste k, l, m przecinające się w punktach A, B, C odpowiednio: k z l, l z m i k z m. Na tych prostych obrano także odpowiednio punkty X, Y, Z. Wówczas te punkty są współliniowe wtw. gdy zachodzi stosunek:

$$\frac{AX}{XC} \cdot \frac{CZ}{ZB} \cdot \frac{BY}{YA} = 1$$

oraz liczba punktów X, Y, Z leżących wewnątrz odcinków AB, BC, AC jest parzysta.

2. Twierdzenie Cevy

Na bokach trójkąta ABC obrano odpowiednio punkty: X na BC, Y na AC oraz Z na AB. Wówczas proste AX, BY, CZ przecinają się w jednym punkcie wtw., gdy zachodzi warunek:

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$$

3. Twierdzenie Brianchona

Główne przekątne sześciokąta opisanego na stożkowej przecinają się w jednym punkcie.

4. Twierdzenie Sinusów

Niech ABC będzie trójkątem o standardowych oznaczeniach: jego kąty przy wierzchołkach A,B,C mają miary odpowiednio α, β, γ, zaś boki naprzeciw nich długości a, b i c. Niech promień okręgu opisanego na ABC wynosi R. Wówczas zachodzi:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

II. Dwustosunek

Dwustosunkiem punktów $(A, C; B, D)$ na prostej nazywamy stosunek:

$$(A, C; B, D) = \frac{\frac{AB}{BC}}{\frac{AD}{DC}}$$

Gdy dwustosunek czterech punktów na prostej jest równy 1 to mówimy, że czwórka ta jest sprzężona harmonicznie.

III. Zadanka

1.Dany jest trójkąt nierównoramienny ABC i punkt D na boku BC. Rozważamy wszystkie pary punktów K i L na odpowiednio leżących na bokach AC i AB, że BK i CL przecinają się na odcinku AD. Pokazać, że wszystkie proste KL dla rozważanych par punktów są współpękowe.

2.Udowodnić, że konstrukcja sprzężenia harmonicznego jest prawidłowa bez używania Cevy i Menelausa, ale tylko z pomocą rzutowania dwustosunków.

3. Na płaszczyźnie dany jest okrąg i punkt A. Skonstruować za pomocą samej linijki styczne do tego okręgu przechodzące przez punkt A.

4. (II etap, XLVII OM) Okrąg o środku w O wpisany w czworokąt $ABCD$ styczny jest do boków AB, BC, CD, AD odpowiednio w punktach K, L, M, N, przy czym proste KL i MN przecinają się w punkcie S. Pokazać, że proste BD i OS są prostopadłe.

5. (IV WM) W okręgu ω dana jest cięciwa CE niebędąca średnicą. Punkt D jest środkiem krótszego łuku CE, odcinek KD zaś jest średnicą okręgu ω. Punkty A i B należą odpowiednio do odcinków KE i KC. F jest takim punktem na odcinku AB, że $\frac{|BF|}{|AF|} = \frac{|BC|}{|AE|}$. Udowodnić, że $|\measuredangle FCE| = |\measuredangle ADE|$.

11. (I etap, LVI OM) Okrąg o środku I jest wpisany w czworokąt wypukły $ABCD$, przy czym punkt I nie leży na prostej AC. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie E. Prosta przechodząca przez punkt E oraz prostopadła do prostej BD przecina proste AI, CI odpowiednio w punktach P, Q. Wykazać, że $PE = EQ$.