Zadania z Baltic Way'ów

Zadanie 1. Znaleźć wszystkie funkcje $f : N \to N$ takie, że dla wszystkich $x, y \in N$ zachodzi

$$f(x,x) = x$$

$$f(x,y) = f(y,x)$$

$$(x+y)f(x,y) = yf(x,x+y)$$

Zadanie 2. Ciąg $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ definiujemy w następujący sposób: $x_0 = a$,$x_1 = 2$,$x_n = 2x_{n-1}x_{n-2} - x_{n-1} - x_{n-2} + 1$. Znaleźć wszystkie takie $a \in Z$, że $2x_{3n} - 1$ jest kwadratem dla każdego $n \geqslant 1$.

Zadanie 3. Niech p będzie liczbą pierwszą, a n- liczbą naturalną. Niech q będzie dodatnim dzielnikiem liczby $(n+1)^p - n^p$. Pokazać, re $q - 1$ jest podzielne przez p.

Zadanie 4. Punkty A, B, C, D, E leżą w tej właśnie kolejności na prostej, przy czym $AB = BC = CD = DE$. Punkt F leży poza tą prostą. Niech G i H będą środkami okręgów opisanych na trójkątach ADF i BEF. Pokazać, że proste FC i GH są prostopadłe.

Zadanie 5. W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ mamy $AE||BC$ oraz $\angle ADE = \angle BDC$. Niech P będzie punktem przecięcia się AC i BE. Pokazać, że $\angle EAD = \angle BDP$ oraz $\angle CBD = \angle ADP$.

Zadanie 6. Danych jest $2n$ kart. Na każdej napisana jest liczba rzeczywista $1 \leqslant x \leqslant 2$. Udowodnić, że karty można podzielić na dwa stosy o sumach s_1 i s_2 takie, że

$$\frac{n}{n+1} \leqslant \frac{s1}{s2} \leqslant 1$$

Zadanie 7. Niech $a, b, c \in R^+$. Pokazać, że

$$\frac{2a}{a^2+bc} + \frac{2b}{b^2+ac} + \frac{2c}{c^2+ab} \leqslant \frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab}$$