Bajery

1. Ciągi a_n i b_n spełniają zależności:

$a_0 = \frac{3}{5}, b_0 = \frac{4}{5}$

$a_n = a_{n-1}b_{n-1}$

$b_n = \frac{b_{n-1}^2 - a_{n-1}^2}{2}$

dla $n \geqslant 1$. Pokazać, że dla każdego k całkowitego nieujemnego zachodzi $|a_k| + |b_k| \geqslant \frac{1}{2^{2^k-1}}$.

2. Na tablicy napisano liczby $0, 1, \sqrt{2}$. W jednym ruchu można do dowolnej z nich dodać różnicę dwóch pozostałych. Rozstrzygnąc, czy można w ten sposób uzyskać trójkę (nieuporządkowaną) $0, 2, \sqrt{2}$.

3. Wyznaczyć wszystkie wartości wyrażenia $5ab+3bc+4ac$ dla liczb rzeczywistych dodatnich a,b,c spełniających równości:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 9 \\ 5a^2 + 5c^2 + 6ac = 80 \\ 5b^2 + 5c^2 + 8bc = 125 \end{cases} .$$

4. Liczby m, n są całkowite dodatnie zaś x, y rzeczywiste nieujemne, sumujące się do 1. Pokazać, że zachodzi nierówność:

$$(1 - x^m)^n + (1 - y^n)^m \geqslant 1$$

5. Oblicz $\sum_{i=0}^{n} \binom{3n}{3i}$.

6. Rozstrzygnąć, czy istnieją takie liczby całkowite dodatnie a, b, by liczba $a^2 + ab^3$ była sześcianem liczby całkowitej.