

Argentyna, czyli nietrudna teoria liczb

07.01.2010

1. Rozwiązać w liczbach całkowitych dodatnich równanie:

$$xy + yz + zx - xyz = 2.$$

2. Niech d będzie dodatnią liczbą całkowitą różną od 2, 5 i 13. Wykazać, że ze zbioru $\{2, 5, 13, d\}$ można wybrać takie różne liczby a i b , że liczba $ab - 1$ nie jest kwadratem liczby naturalnej.

3. Znaleźć wszystkie takie dodatnie liczby całkowite x i y , by liczba $\frac{xy^2}{x+y}$ była pierwsza.

4. Okrąg ω wpisany w trójkąt równoramienny ABC ($AC = BC$) jest styczny do BC punkcie E . Różna od AE prosta przechodząca przez A przecina ω w dwóch różnych punktach F i G . Proste EF i EG przecinają prostą AB odpowiednio w punktach K i L . Wykazać, że $AK = BL$.