Asian - Pacific

1. Liczby dodatnie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sumują się do S. Pokazać, że:

$$(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n) \leqslant 1 + S + \frac{S^2}{2!} + \frac{S^3}{3!} + \ldots + \frac{S^n}{n!}$$

.

2. Liczby dodatnie $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ spełniają $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i = 1$. Pokazać, że:

$$\frac{a_1^2}{a_1+b_1} + \frac{a_2^2}{a_2+b_2} + \ldots + \frac{a_n^2}{a_n+b_n} \geqslant \frac{1}{2}$$

3. Pokazać, że dla liczb dodatnich a, b, c spełniona jest nierówność:

$$(1+\frac{a}{b})(1+\frac{b}{c})(1+\frac{c}{a}) \geqslant 2(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}})$$

4. Ciąg liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dla każdych indeksów i, j spełnia $a_{i+j} \leqslant a_i + a_j$. Pokazać, że dla każdego całkowitego dodatniego n zachodzi:

$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \ldots + \frac{a_n}{n} \geqslant a_n$$

5. Okręgi C_1 i C_2 o środkach odpowiednio O_1, O_2 są styczne zewnętrznie w A oraz wewnętrznie w odpowiednio A_1, A_2 do okręgu C o środku w O. Pokazać, że proste OA, O_1A_2, O_2A_1 przecinają się w jednym punkcie.

6. Znaleźć najmniejszą liczbę k dla której istnieje funkcja $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \{1, 2, \ldots, k\}$, że $f(x) \neq f(y)$ dla $|x-y| \in \{5, 7, 12\}$.

7. Rozstrzygnąć, czy istnieją takie a, b całkowite dodatnie, że liczba $(36a+b)(a+36b)$ jest potęgą 2.