KÓŁECZKO Z OKRĘGU APOLONIUSZA I PROSTEJ SIMPSONA (19.03.2008)

1. TEORIA

1.1. Dla ustalonych punktów A, B oraz dodatniej liczby $\alpha \neq 1$ zbiór wszystkich punktów P takich że $\frac{AP}{PB} = \alpha$ jest okręgiem (zwanym okręgiem Apoloniusza).

1.2. Rzuty prostokątne punktu D na boki trójkąta ABC leżą na jednej prostej wtedy i tylko wtedy gdy punkt D leży na okręgu opisanym na ABC.

2. ZADANIA

2.1. Na okręgu o środku O i promieniu R obrano punkty A i D. Na półprostej OD leżą takie dwa punkty B i C, że $OB \cdot OC = R^2$. Wykazać, że półprosta AD jest dwusieczną kąta BAC.

2.2. W czworokącie $ABCD$ miara kąta wewnętrznego przy wierzchołku A jest większa od $180°$ oraz zachodzi równość $AB \cdot CD = AD \cdot BC$. Punkt P jest symetryczny do punktu A względem prostej BD. Udowodnić, że kąty PCB i ACD są równe.

2.3. Dane są proste k i l oraz punkty A, D, B leżące na prostej k w tej właśnie kolejności. Skonstuować taki punkt C na prostej l, by DL była dwusieczną kąta ACB.

2.4. W trójkącie ostrokątnym ABC punkty D i E są spodkami wysokości z A i B. Zbudowano prostokąt $EWDU$ taki, że dwa z jego boków zawierają się w prostej BC i wysokości spuszczonej z A. Prosta UW przecina bok AB w punkcie P. Pokazać, że proste EP i AB są prostopadłe.

2.5. Dany jest trójkąt ABC oraz punkt X na zewnątrz niego i zawarty w kącie ABC taki, że punkt P - rzut X na prostą AB - leży na zewnątrz odcinka AB, zaś Q - rzut X na prostą BC leży wewnątrz odcinka BC. Niech R będzie przecięciem prostych AC i PQ. Pokazać, że proste AC i XR są prostopadłe wtedy i tylko wtedy gdy trójkąty XPA i XQC są podobne.

2.6. Prostokąt $A_1A_5A_6A_2$ podzielono odcinkiem A_3A_4 na dwa prostokąty tak, że A_3 leży na odcinku A_1A_5 zaś A_4 na odcinku A_2A_6. Następnie prostokąt $A_3A_4A_6A_5$ podzielono na dwa prostokąty odcinkiem XY, tak że X leży na odcinku A_5A_6 zaś Y na A_3A_4. Niech Q, P będą rzutami punktu X na proste A_3A_2 oraz A_1A_4 odpowiednio. Pokazać, że punkty A_5, Y, P są współliniowe wtedy i tylko wtedy gdy punkty A_6, Y, Q są współliniowe.

2.7. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Punkty P, Q, R są rzutami punktu D odpowiednio na boki BC, AC, AB. Pokazać, że $PQ = QR$ wtedy i tylko wtedy gdy dwusiecznie kątów ABC i ADC przecinaja sie na odcinku AC.