

Okrag Apoloniusza i nierownosci z polami

1. Na okregu o srodku w O i promieniu R obrano punkty A i D . Na polprostey OD obrano punkty B, C , takie, ze $OB \cdot OC = R^2$. Pokazac, ze prosta AD jest dwusieczna kata BAC .

2. W trojkacie ABC niech D bedzie punktem przeciecia dwusiecznej kata C z bokiem AB . Przez P oznaczmy pole trojkata ABC . Udowodnic, ze zachodzi nierownosc

$$2P\left(\frac{1}{AD} - \frac{1}{BD}\right) \leq AB$$

3. W czworokacie $ABCD$ miara kata wewnetrznego przy wierzchoлку A jest wieksza od 180° oraz zachodzi rownosc $AB \cdot CD = AD \cdot BC$. Punkt P jest symetryczny do punktu A wzgledem prostej BD . Udowodnic, ze $\angle PCB = \angle ACD$.

4. Dane sa prosta k i l oraz punkty A, D, B na prostej k lezace w tej wlasnie kolejnosci nań. Skonstruowac taki punkt C na prostej l , by DL byla dwusieczna kata $\angle ACB$.

5. Trojkąt ma boki a, b, c oraz pole S . Pokazac, ze:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$$

6. Trojkąt ma boki a, b, c oraz promien okregu wpisanego r . Pokazac, ze:

$$\sqrt{ab + bc + ca} \geq 6r$$

7. Trojkąt ma boki a, b, c oraz promien okregu opisanego R . Pokazac, ze:

$$R \geq \frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$