Ciągi i geometria

17.12.2009r.

1. Znajdź wszystkie a takie, że w ciągu f_n ($f_1 = 0, f_2 = a \in \mathbb{R}, f_n = -2f_{n-1} - f_{n-2}$ dla $n \geqslant 3$) występuje więcej niż jedno zero.

2. Pokaż, że w ciągu a_n ($a_{n+1} = a_n^3 + 1999$ dla $n \in \mathbb{N}$) występuje co najwyżej jeden kwadrat.

3. Niech a i b będą dwoma względnie pierwszymi liczbami całkowitymi. Udowodnij, że istnieje nieskończony zbiór, zawierający parami względnie pierwsze wyrazy ciągu arytmetycznego $a, a + b, a + 2b, \ldots$.

4. Niech A, B, C, D będą różnymi punktami na prostej (w tej kolejności). Okręgi o średnicy AC i BD przecinają się w punktach X i Y. Niech O będzie dowolnym punktem na prostej XY, ale nie na AD. CO przecina okrąg ze średnicą AC ponownie w M oraz BO przecina drugi okrąg ponownie w N. Udowodnij, że proste AM, DN, XY są współpękowe.